مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
© Statistical Research and Training Center
دوره‌ی ۲، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۸۴، صص ۱۲۹-۱۳۹
J. Statist. Res. Iran **2** (2005): 186-196

برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای $\mathrm{Bin}(n,\theta)$ تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطا در فضای پارامتری از پایین کراندار

محمد جعفری جوزانی

دانشگاه علامه طباطبایی

چکیده. روش‌های معمول برآوردیابی، از قبیل روش ماکسیمم درست‌نمایی، در فضاهای پارامتری کراندار تحت تابع زیان توان دوم خطا، عموماً منجر به برآوردگرهای ناپذیرفتنی می‌شوند. برآوردیابی به‌روش مینیماکس، روش متداول دیگری است که در چنین فضاهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد و معمولاً برآوردگرهای پذیرفتنی را نیز به دست می‌دهد. در این مقاله، برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطا را در فضای پارامتری از پایین کراندار $\theta \in [b, ۱]$ به دست آورده، ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. همچنین شرط لازم و کافی برای مینیماکس بودن برآوردگر بیزی پارامتر θ نسبت به توزیع پیشین دونقطه‌ای روی فضای پارامتری از پایین کراندار را به صورت کران پایین روی b به دست آورده، مقادیر عددی آن را به‌ازای مقادیر مختلف n ارائه می‌کنیم.

واژگان کلیدی. برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی؛ تابع زیان توان دوم لگاریتم خطا؛ توزیع دوجمله‌ای؛ فضای پارامتری کراندار؛ نامساعدترین توزیع پیشین.

۱ مقدمه

یکی از مسائلی که بیش‌تر مواقع و به‌ویژه در مسائل عملی با آن روبه‌رو هستیم، مسئله‌ی برآوردیابی در فضاهای پارامتری کراندار است. این مسئله به چند دلیل از اهمیت زیادی برخوردار بوده و مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است، که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- در بسیاری از مسائل عملی و در بررسی پدیده‌های واقعی، مانند میزان درامد، اندازه‌ی قد، و درصد افراد دارای یک ویژگی خاص، فضای پارامتری مورد بررسی، کراندار است.
- صرف نظر از جنبه‌های آماری و ریاضی برآوردیابی در فضاهای پارامتری کراندار، برآوردگرهای معمولِ پارامتر مورد بررسی در چنین فضاهایی معمولاً فاقد شرایط لازم برای یک برآوردگر خوب هستند. به‌عنوان مثال، روش‌های معمول برآوردیابی از قبیل روش ماکسیمم درست‌نمایی در فضاهای پارامتری کراندار تحت تابع زیان توان دوم خطا عموماً منجر به برآوردگرهای ناپذیرفتنی می‌شوند. به‌طور کلّی، در چنین شرایطی هر برآوردگری که مقادیر مرزی یا نزدیک مرزی فضای پارامتری خود را با احتمال مثبت اختیار کند، ناپذیرفتنی است.
- از آن‌جا که در فضاهای پارامتری کراندار، هیچ برآوردگر ناار یبی برای پارامتر مورد بررسی موجود نیست، استفاده از معیار ناار یبی در چنین مواقعی سودمند نمی‌باشد و استفاده از روش‌های جایگزین و سایر معیارهای خوب بودن مانند ناوردایی، مینیماکس بودن، یا پذیرفتنی بودن، مورد توجه قرار می‌گیرد (مورس، ۱۹۸۵، ص ۲۲).

بنا بر این، مسئله‌ی برآوردیابی در فضاهای پارامتری کراندار، یکی از مسائل مهم در استنباط آماری است. برآوردیابی به‌روش مینیماکس، یکی از روش‌های متداولی است که به‌عنوان جایگزینِ روش‌های معمول برآوردیابی، مانند روش ماکسیمم درست‌نمایی، در چنین فضاهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد، که معمولاً برآوردگرهای پذیرفتنی را نیز به دست می‌دهد. برای مرور مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی برآوردیابی در فضاهای پارامتری کراندار به مارچاند و استرادرمن (۲۰۰۴) مراجعه کنید.

یکی از اوّلین کسانی که به مطالعه در باره‌ی برآورد مینیماکس و پذیرفتنی در فضاهای پارامتری کراندار پرداخت، کاتز (۱۹۶۱) است که توانست برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی برای میانگین توزیع نرمال در فضای پارامتری از پایین کراندار، تحت تابع زیان توان دوم خطا را به دست آورد. در دو دهه‌ی اخیر، پژوهشگران به‌طور گسترده‌ای برآوردیابی به‌روش مینیماکس در فضای پارامتری کراندار را مورد توجه قرار داده‌اند. برای مشاهده‌ی خلاصه و نمونه‌ای از کارهای انجام‌شده به بادر و بیشاف (۲۰۰۲)، بیشاف (۱۹۹۲)، جعفری جوزانی و دیگران (۲۰۰۲)، مارچاند و پارسیان (۲۰۰۶)، ون ایدن (۲۰۰۶)، و جعفری جوزانی و مارچاند (۲۰۰۷) مراجعه شود.

در بیش‌تر مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی برآوردیابی مینیماکس در فضاهای پارامتری کراندار، تابع زیان مورد استفاده، تابع زیان توان دوم خطا، و همچنین توزیع‌های مورد بررسی از نوع پیوسته بوده است؛ حال آن‌که استفاده از سایر توابع زیان، به‌ویژه توابع زیان نامتقارن، و همچنین برآورد پارامتر توزیع‌های گسسته نیز مورد توجه می‌باشد و پرداختن به چنین مسائلی از اهمیت زیادی برخوردار است. در این مقاله، تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطا، که تابع زیانی نامتقارن است و به‌صورت

$$L(\theta, \delta) = (\log \delta - \log \theta)^{۲} = \left\{ \log \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \right\}^{۲} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود، برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر نامعلوم θ را در توزیع دوجمله‌ای $\mathrm{Bin}(n, \theta)$ با تابع احتمال زیر، در یک فضای پارامتری از پایین کراندار به‌صورت $\Theta = [b, ۱]$، $(۰ < b < ۱)$، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$P_\theta(X = x) = \binom{n}{x} \theta^x (۱ - \theta)^{n-x}, \qquad x = ۰, \ldots, n \qquad (۲)$$

جعفری جوزانی و مارچاند (۲۰۰۷) برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر θ در فضای پارامتری کراندار $\Theta = [a, b]$ را در خانواده‌ای از توزیع‌های گسسته‌ی آماری در رده‌ای از توابع زیان به‌صورت $L_\gamma(\theta, \delta) = (\gamma(\delta) - \gamma(\theta))^{۲}$ به دست آوردند که در آن، $\gamma(\cdot)$ تابعی یکنوا است که در شرط $\gamma(a) = ۰$ صدق می‌کند. شایان ذکر است که با انتخاب $\gamma(t) = \log(t)$ تابع زیان $L_\gamma(\theta, \delta)$ به تابع زیان توان دوم لگاریتم خطای (۱) تبدیل می‌شود. با این حال، از آن‌جا که برای مسئله‌ی مورد بررسی در این مقاله، شرایط ارائه‌شده در جعفری جوزانی و مارچاند (۲۰۰۷) برقرار نیست، نمی‌توان از نتایج آن برای به دست آوردن برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر نامعلوم $\theta \in [b, ۱]$ در توزیع دوجمله‌ای $\mathrm{Bin}(n, \theta)$ تحت تابع زیان (۱) استفاده کرد. برای مشاهده‌ی خلاصه‌ای از مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی برآوردیابی پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای در فضاهای پارامتری کراندار و غیرکراندار تحت تابع زیان توان دوم خطا، به مورس (۱۹۸۳) مراجعه کنید.

در این مقاله، در بخش ۲ ابتدا مفاهیم و نتایج مقدماتی را ذکر می‌کنیم. در بخش ۳ ضمن ارائه‌ی برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر $\theta \in [b, ۱]$، شرط لازم و کافی برای مینیماکس بودن برآوردگر بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان (۱) نسبت به توزیع پیشین دونقطه‌ای را به‌صورت کران پایینی روی b به دست می‌آوریم. همچنین مقادیر عددی کران پایین مذکور را به‌ازای مقادیر مختلف n در جدولی ارائه می‌کنیم.

۲ نتایج اوّلیه

فرض کنید $X = (X_1, \ldots, X_n)$ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازه‌ی n با توزیع مشترک $\mathcal{P}_\theta$ باشد که در آن، $\theta \in \Theta$ پارامتر مجهول مورد نظر است، $\Theta = [\alpha, \beta]$ فضای پارامتری است، و $\alpha < \beta$. فرض کنید $f(x, \theta)$ مشتق رادون-نیکودیم $\mathcal{P}_\theta$ نسبت به اندازه‌ی σ-متناهیِ μ باشد. همچنین فرض کنید برای هر $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $f(x, \alpha) + f(x, \beta) \neq 0$، و به‌ازای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ داشته باشیم $\mathcal{P}_\theta\{x \in \mathcal{X} : f(x, \alpha) f(x, \beta) > 0\} > 0$، که در آن $\mathcal{X}$ فضای نمونه‌ای است. توزیع پیشین دونقطه‌ای π را به‌صورت زیر روی فضای پارامتری $\Theta = [\alpha, \beta]$ در نظر می‌گیریم.

$$\pi(\{\alpha\}) = \eta = 1 - \pi(\{\beta\}), \qquad \eta \in (0, 1) \tag{۳}$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که برآوردگر بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطای (۱) عبارت است از

$$\delta_\pi(X) = \exp\{E(\log \theta | X)\}. \tag{۴}$$

همچنین توزیع پسین θ به‌شرط $X = x$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\pi(\alpha | x) = \frac{\eta f(x, \alpha)}{\eta f(x, \alpha) + (1 - \eta) f(x, \beta)} = 1 - \pi(\beta | x). \tag{۵}$$

بنا بر این، برآورد بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان (۱) نسبت به توزیع پیشین (۳) به‌صورت

$$\delta_\pi(x) = \exp\left\{\frac{\eta \log \alpha f(x, \alpha) + (1 - \eta) \log \beta f(x, \beta)}{\eta f(x, \alpha) + (1 - \eta) f(x, \beta)}\right\} \tag{۶}$$

محاسبه می‌شود، که در آن اگر $f(x, \alpha) = 0$ باشد، خواهیم داشت $\delta_\pi(x) = \beta$، و اگر $f(x, \beta) = 0$ باشد، خواهیم داشت $\delta_\pi(x) = \alpha$.

برای هر $\eta \in (0, 1)$ داریم $\frac{\partial}{\partial \eta} \delta_\pi(x) < 0$؛ بنا بر این، $\delta_\pi(x)$ تابعی نزولی از η است و از آن‌جا که وقتی $\eta = 0$ باشد، داریم $\delta_\pi(x) = \beta$، و به‌ازای $\eta = 1$ داریم $\delta_\pi(x) = \alpha$، به‌راحتی تحقیق می‌شود که $\alpha \leqslant \delta_\pi(x) \leqslant \beta$؛ یعنی برآورد بیزی (۶)، مقادیر خود را در فضای پارامتری $\Theta = [\alpha, \beta]$ اختیار می‌کند.

قضیه‌ی ۱ مقدار یکتای $\eta^* \in (0, 1)$ موجود است به‌طوری که $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$، که در آن π^* توزیع پیشین (۳) با $\eta = \eta^*$ است. به‌علاوه، برای $\eta \in (\eta^*, 1)$ داریم

$$R(\alpha, \delta_\pi) < R(\beta, \delta_\pi)$$

و برای $\eta \in (0, \eta^*)$ داریم

$$R(\alpha, \delta_\pi) > R(\beta, \delta_\pi).$$

برهان. قرار دهید

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathcal{X} | f(x, \alpha) f(x, \beta) > 0\},$$
$$\mathcal{X}_2 = \{x \in \mathcal{X} | f(x, \alpha) = 0, \ f(x, \beta) \neq 0\},$$
$$\mathcal{X}_3 = \{x \in \mathcal{X} | f(x, \alpha) \neq 0, \ f(x, \beta) = 0\}.$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که

$$R(\theta, \delta_\pi) = \int_{\mathcal{X}_1} (\log \delta_\pi - \log \theta)^2 \ d\mathcal{P}_\theta + (\log \beta - \log \theta)^2 \mathcal{P}_\theta(\mathcal{X}_2) + (\log \alpha - \log \theta)^2 \mathcal{P}_\theta(\mathcal{X}_3). \quad (۷)$$

همچنین $\mathcal{P}_\alpha(\mathcal{X}_2) = \mathcal{P}_\beta(\mathcal{X}_3) = 0$. اگر قرار دهیم $A(\eta) = \log \delta_\pi(x)$ که در آن، $\delta_\pi(x)$ به‌وسیله‌ی رابطه‌ی (۶) داده شده است، به‌راحتی می‌توان نشان داد که $A(\eta)$ تابعی نزولی از η است و از آن‌جا که $\lim_{\eta \to 1^-} A(\eta) = \log \alpha$ و $\lim_{\eta \to 0^+} A(\eta) = \log \beta$، داریم $\log \alpha \leqslant A(\eta) \leqslant \log \beta$. بنا بر این،

$$R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi) = \int_{\mathcal{X}_1} (\log \delta_\pi - \log \alpha)^2 \ d\mathcal{P}_\alpha - \int_{\mathcal{X}_1} (\log \delta_\pi - \log \beta)^2 \ d\mathcal{P}_\beta.$$

با استفاده از قضیه‌ی همگرایی مغلوب، داریم

$$\lim_{\eta \to 0^+} \{R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi)\} = (\log \beta - \log \alpha)^2 \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{X}_1) > 0.$$

همچنین،

$$\lim_{\eta \to 1^-} \{R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi)\} = -(\log \alpha - \log \beta)^2 \mathcal{P}_\beta(\mathcal{X}_1) < 0$$

و از آن‌جا که $R(\theta, \delta_\pi)$ تابعی پیوسته از η است، دست‌کم یک $\eta^* \in (0, 1)$ وجود دارد به‌طوری که $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$. قرار دهید

$$H(\eta) = \{A(\eta) - \log \alpha\}^2 f(x, \alpha) - \{A(\eta) - \log \beta\}^2 f(x, \beta).$$

از آن‌جا که $f(x,\theta)$ مشتق رادون-نیکودیم $\mathcal{P}_\theta$ نسبت به اندازه‌ی σ-متناهی μ است، داریم

$$R(\alpha,\delta_\pi) - R(\beta,\delta_\pi) = \int_{\mathcal{X}_1} H(\eta)\ d\mu.$$

برای هر $x \in \mathcal{X}_1$،

$$\begin{aligned} H'(\eta) &= \frac{\partial}{\partial\eta}H(\eta) = 2\frac{\partial}{\partial\eta}A(\eta)[\{A(\eta)-\log\alpha\}f(x,\alpha) - \{A(\eta)-\log\beta\}f(x,\beta)] \\ &= -2\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}A(\eta)\right\}^2 \{\eta f(x,\alpha) + (1-\eta)f(x,\beta)\} < 0. \end{aligned}$$

این بدان معنا است که $H(\eta)$ و در نتیجه $R(\alpha,\delta_\pi) - R(\beta,\delta_\pi)$ تابعی اکیداً نزولی از η است. بنا بر این، آن η^* که در $R(\alpha,\delta_{\pi^*}) = R(\beta,\delta_{\pi^*})$ صدق می‌کند، یکتا است. به‌علاوه، برای هر $\eta \in (\eta^*,1)$ داریم $R(\alpha,\delta_\pi) < R(\beta,\delta_\pi)$. همچنین برای هر $\eta \in (0,\eta^*)$ داریم $R(\alpha,\delta_\pi) > R(\beta,\delta_\pi)$ و حکم ثابت می‌شود.

۳ برآورد مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر $\theta \in [b,1]$ در توزیع دوجمله‌ای

فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از توزیع برنولی $\mathrm{Bin}(1,\theta)$ باشد، که در آن، $\theta \in [b,1]$ و $0 < b < 1$. قرار دهید $X = \sum_{i=1}^n X_i$، که در آن، X دارای توزیع دوجمله‌ای $\mathrm{Bin}(n,\theta)$ با تابع احتمال (۲) است. تحت توزیع پیشین (۳) با $\alpha = b$ و $\beta = 1$، برآوردگر بیزی (۶) به‌صورت

$$\delta_\pi(X) = b_n I_{\{X=n\}} + bI_{\{X<n\}} \tag{۸}$$

به دست می‌آید، که در آن، $b_n = \exp\{b^n\eta\log b/(b^n\eta + (1-n))\}$، $\eta \in (0,1)$ و I_A تابع نشانگر پیشامد A است. همچنین تابع مخاطره‌ی برآوردگر بیزی (۸) تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطای (۱) به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$R(\theta,\delta_\pi) = \log\left(\frac{b_n}{b}\right)(\log b_n + \log b - 2\log\theta)\theta^n + (\log b - \log\theta)^2. \tag{۹}$$

در ادامه، برآوردگر مینیماکس پارامتر θ تحت تابع زیان (۱) را به دست می‌آوریم. برای این منظور، از معیار معروف مینیماکس بودن برآوردگرهای بیزی که در لم زیر آمده است استفاده می‌کنیم (برای اثبات به برگر (۱۹۸۵، بخش ۵٫۳) یا لی‌من و کسِلا (۱۹۹۸، بخش ۱٫۵) مراجعه کنید).

لم ۱ فرض کنید δ_π برآوردگر بیزی پارامتر θ نسبت به توزیع پیشین π باشد و

$$S_\pi = \{\theta \in \Theta : \sup_\Theta \{R(\theta, \delta_\pi)\} = R(\theta, \delta_\pi)\}.$$

آن‌گاه δ_π برآوردگر مینیماکس است هرگاه $P_\pi(\theta \in S_\pi) = 1$.

بیش‌تر مواقع برای اثبات مینیماکس بودن برآوردگرهای بیزی نسبت به توزیع‌های پیشین دونقطه‌ای، به‌ویژه در فضاهای پارامتری کراندار، می‌توان از لم زیر استفاده کرد، که اثبات آن به‌کمک لم ۱ به‌راحتی به دست می‌آید.

لم ۲ فرض کنید δ_π برآوردگر بیزی پارامتر θ نسبت به توزیع پیشین دونقطه‌ای π روی $\{\alpha, \beta\}$ باشد به‌طوری که $R(\alpha, \delta_\pi) = R(\beta, \delta_\pi)$. آن‌گاه δ_π برآوردگر مینیماکس پارامتر θ در فضای پارامتری $\Theta = [\alpha, \beta]$ است هرگاه به‌عنوان تابعی از θ،

آ) $\frac{\partial}{\partial\theta} R(\theta, \delta_\pi)$ حد اکثر یک تغییر علامت از $-$ به $+$ داشته باشد، یا

ب) $R(\theta, \delta_\pi)$ محدب باشد.

در قضیه‌ی ۱ نشان دادیم مقدار یکتایی مانند $\eta^* \in (0, 1)$ موجود است به‌طوری که $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$. برای مشخص کردن η^*، با استفاده از تابع مخاطره‌ی (۹) داریم

$$R(b, \delta_\pi) = b^n \log^2 b \left(\frac{1-\eta}{b^n\eta + (1-\eta)}\right)^2$$

و

$$R(1, \delta_\pi) = \frac{b^{2n}\eta^2 \log^2 b}{\{b^n\eta + (1-\eta)\}^2}.$$

در نتیجه، از حل معادله‌ی $R(b, \delta_\pi) - R(1, \delta_\pi) = 0$ نسبت به η، مقدار $\eta^* = \frac{1}{b^{\frac{n}{2}}+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$ به دست می‌آید. حال با استفاده از مشتق اوّل $R(\theta, \delta_{\pi^*})$ نسبت به θ، که با جایگزین کردن $\eta = \eta^* = \frac{1}{b^{\frac{n}{2}}+1}$ در $\frac{\partial}{\partial\theta} R(\theta, \delta_\pi)$ به دست می‌آید و به‌صورت زیر است،

$$\frac{\partial}{\partial\theta} R(\theta, \delta_{\pi^*}) = -2\theta^{n-1} \log\left(\frac{b_n}{b}\right) + n\theta^{n-1}\left\{\log\left(\frac{b_n}{b}\right)(\log b_n + \log b - 2\log\theta) - \frac{2}{\theta}(\log b - \log\theta)\right\},$$

جدول ۱. مقادیر $b^*_{\circ}(n)$ و $b_{\circ}(n)$ به‌ازای مقادیر مختلف n

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$b^*_{\circ}(n)$	۰٫۷۲۹	۰٫۸۵۴	۰٫۹۰۰	۰٫۹۲۴	۰٫۹۳۸	۰٫۹۴۸	۰٫۹۵۵	۰٫۹۶۱	۰٫۹۶۵	۰٫۹۶۸
$b_{\circ}(n)$	۰٫۷۴۹	۰٫۸۶۵	۰٫۹۰۶	۰٫۹۳۰	۰٫۹۴۳	۰٫۹۵۳	۰٫۹۵۹	۰٫۹۶۵	۰٫۹۶۸	۰٫۹۷۱

شرط لازم برای مینیماکس بودن برآوردگر بیزی δ_{π^*} (که با جایگزین کردن $\eta = \eta^* = \frac{۱}{b^{\frac{n}{۲}}+۱}$ در (۸) به دست می‌آید) آن است که $\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta, \delta_{\pi^*})$ در $\theta = ۱$ مثبت باشد. برای این منظور، داریم

$$\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=۱} = -۲\left(\frac{b^{\frac{n}{۲}}}{b^{\frac{n}{۲}}+۱}\right)\log b - \frac{n}{(b^{\frac{n}{۲}}+۱)^۲}(۲b^{\frac{n}{۲}}+۱)\log^۲ b.$$

از طرفی $۱ > \frac{۱}{b^{\frac{n}{۲}}+۱} > \frac{۱}{۲}$ و $\log b_n|_{\eta=\eta^*} = \frac{b^{\frac{n}{۲}}}{b^{\frac{n}{۲}}+۱}\log b$؛ بنا بر این، $\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=۱}$ مثبت است هرگاه

$$\Lambda(b) = b^{\frac{n}{۲}} + n(۲b^{\frac{n}{۲}}+۱)\log b \geqslant ۰.$$

به‌علاوه، $\Lambda(۱) = ۱$ و $\lim_{b\to ۰^+}\Lambda(b) = -\infty$. بنا بر این، یک مقدار $b^*_{\circ}(n)$ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $b^*_{\circ}(n) < b < ۱$ داشته باشیم $\Lambda(b) > ۰$ و در نتیجه $\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=۱} > ۰$. جدول ۱ مقدار واقعی $b^*_{\circ}(n)$ به‌ازای مقادیر مختلف n را نشان می‌دهد. همچنین از آن‌جا که

$$b^{\frac{n}{۲}} + n(۲b^{\frac{n}{۲}}+۱)\log b > b^{\frac{n}{۲}} + ۳n\log b = \Psi(b),$$

که در آن، $\lim_{b\to ۰^+}\Psi(b) = -\infty$ و $\lim_{b\to ۱^-}\Psi(b) = ۱$ و $\Psi(b)$ تابعی اکیداً صعودی از b است، $b_{\circ}(n)$ یکتایی موجود است که به‌ازای هر $b_{\circ}(n) < b < ۱$ مقدار $\Psi(b)$ و در نتیجه $\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=۱}$ مثبت است. بنا بر این، می‌توان از $b_{\circ}(n)$ به‌عنوان تقریبی از $b^*_{\circ}(n)$ استفاده کرد. جدول ۱ مقدار $b_{\circ}(n)$ به‌ازای مقادیر مختلف n را نشان می‌دهد. حال، شرط کافی برای مینیماکس بودن δ_{π^*} را با بررسی مشتق دوم تابع مخاطره‌ی (۹) که در زیر آمده است مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲}R(\theta, \delta_{\pi^*}) = \frac{۱}{\theta^۲}\{۲ + Q(\theta)\},$$

که در آن،

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= -۲(۲n-۱)\theta^n\log\left(\frac{b_n}{b}\right) + ۲(\log b - \log\theta) \\ &\quad + n(n-۱)\theta^n\log\left(\frac{b_n}{b}\right)(\log b_n + \log b - ۲\log\theta) \\ &= A\theta^n + C - ۲\log\theta - B\theta^n\log\theta \end{aligned}$$

و مقادیر A، B و C به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$A = n(n-1)(\log^2 b_n - \log^2 \theta) - 2(2n-1)(\log b_n - \log b),$$

$$B = 2n(n-1)(\log b_n - \log b),$$

$$C = 2\log b.$$

مشتق اوّل $Q(\theta)$ نسبت به θ عبارت است از

$$\theta \frac{d}{d\theta} Q(\theta) = (nA - B)\theta^n - 2 - nB\theta^n \log\theta$$

و $Q(\theta)$ تابعی نزولی از θ است اگر و تنها اگر $(nA-B)\theta^n - 2 \leqslant nB\theta^n\log\theta$. از طرفی همان‌طور که دیدیم، به‌ازای هر $b_\circ(n) < b < 1$، $\Psi(b) \geqslant \circ$ تابعی اکیداً صعودی از b است. لذا به‌ازای هر $b \leqslant \theta$ داریم $\Psi(\theta) \leqslant \Psi(b)$. بنا بر این، $3n\log\theta + \theta^{\frac{n}{2}} \geqslant \circ$، یا به عبارت دیگر، $n\log\theta \geqslant -\frac{1}{3}\theta^{\frac{n}{2}} \geqslant -\theta^{\frac{n}{2}}$. همچنین واضح است که به‌ازای هر $n \geqslant 1$ داریم $B \geqslant \circ$. در نتیجه، $\theta^n Bn\log\theta \geqslant -\theta^{\frac{3n}{2}}B \geqslant -\theta^n B$. بنا بر این، به‌ازای هر $b \leqslant b_\circ(n)$، به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\theta\frac{d}{d\theta}Q(\theta) \leqslant \circ$ هرگاه

$$(nA - B)\theta^n - 2 \leqslant -B\theta^n$$

یا به‌طور معادل،

$$n\theta^n A - 2 \leqslant \circ$$

که با توجه به منفی بودن A، همواره صحیح است. بنا بر این، برای $b \leqslant \theta \leqslant 1$، $Q(\theta)$ تابعی نزولی از θ است هرگاه $b \geqslant b_\circ(n)$. در نتیجه، $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}R(\theta, \delta_{\pi^*}) = \frac{1}{\theta^2}\{2 + Q(\theta)\}$ تابعی نزولی از θ است و حد اکثر یک تغییر علامت در بازه‌ی $[b, 1]$ دارد. با توجه به موارد بالا، به‌ازای $b \geqslant b_\circ(n)$، $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}R(\theta, \delta_{\pi^*})$ به‌عنوان تابعی از $\theta \in [b, 1]$، یا همواره مثبت است، یا از مثبت به منفی می‌رود، که در هر دو صورت، مینیماکس بودن δ_{π^*} به‌کمک لم‌های ۱ و ۲ ثابت است. حال می‌توان قضیه‌ی زیر را بیان کرد.

قضیه‌ی ۲ در توزیع دوجمله‌ای (۲)، برآوردگر بیزی یکتای

$$\delta_{\pi^*}(X) = \exp\left\{\frac{b^n \log b}{b^{\frac{n}{2}} + 1}\right\} I_{\{X=n\}} + bI_{\{X<n\}}$$

نسبت به توزیع پیشین دونقطه‌ای (۳) با $\alpha = b$ و $\beta = 1$ تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطای (۱)، برآوردگری مینیماکس و پذیرفتنی برای $\theta \in [b, 1]$ است اگر و تنها اگر $b \geqslant b_\circ(n)$، که در آن، $b_\circ(n)$

ریشه‌ی معادله‌ی $b^{\frac{n}{۲}} + ۳n\log b = ۰$ است. همچنین توزیع پیشین π^* نامساعدترین توزیع پیشین است.

مرجع‌ها

Bader, G.; Bischoff, W. (2003). Old and new aspects of minimax estimation of a bounded parameter. In *Mathematical Statistics and Applications: Festschrift for Constance van Eeden*, M. Moore, S. Froda, and C. Leger, eds. IMS Lecture Notes Monogr. Ser. **42**, Inst. Math. Stat., Beachwood, OH, pp. 15-30.

Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Baysian Analysis*, 2nd ed. Springer, New York.

Bischoff, W. (1992). Minimax estimation and Γ-minimax estimation for functions of a scale parameter family under L_p loss. *Statist. Decisions* **29**, 45-61.

van Eeden, C. (2006). *Restricted Parameter Space Estimation Problems: Admissibility and Minimaxity Properties.* Springer, New York.

Jafari Jozani, M.; Marchand, E. (2007). Minimax estimation of constrained parametric functions for discrete families of distributions. To appear in *Metrika*.

Jafari Jozani, M.; Nematollahi, N.; Shafie, K. (2002). Admissible and minimax estimator of a bounded scale-parameter in a subclass of the exponential family under scale-invariant squared error loss. *Statist. Probab. Lett.* **60**, 437-444.

Katz, M. (1961). Admissible and minimax estimates of parameters in truncated spaces. *Ann. Math. Statist.* **32**, 136-142.

Lehmann, E.L.; Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* Wiley, New York.

Marchand, E.; Parsian, A. (2006). Minimax estimation of a bounded discrete parameter. *Statist. Probab. Lett.* **76**, 547-554.

Marchand, E.; Strawderman, W.E. (2004). Estimation in restricted parameter space: A review. In *A Festschrift for Herman Rubin,* A. Dasgupta, ed. IMS Lecture Notes Monogr. Ser. **45**, Inst. Math. Stat., Beachwood, OH, pp. 21-44.

Moors, J.J.A. (1985). Estimation in truncated parameter spaces. Ph.D. thesis, Tilburg University, Tilburg, The Netherlands.

محمد جعفری جوزانی
گروه آمار، دانشکده‌ی اقتصاد،
دانشگاه علامه طباطبایی،
خیابان شهید بهشتی، نبش خیابان احمد قصیر،
تهران، ایران.
پیام‌نگار: $m.j.jozani@srtc.ac.ir$

