Statistical Research and Training Center
©(2005) J. Stat. Res. Iran **2** 168-186
مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
پژوهشکده‌ی آمار
دوره‌ی ۱، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۸۳، صص ۱۲۳-۱۴۱

برآورد پارامتر مقیاس در یک زیرخانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها تحت تابع زیان متعادل وزنی

احمد پارسیان[†,*] و محمد جعفری جوزانی[‡]

[†]دانشگاه صنعتی اصفهان

[‡]دانشگاه شهید بهشتی

چکیده. در این مقاله زیرخانواده‌ای نمایی از توزیع‌ها با پارامتر مقیاس نامعلوم θ را معرفی کرده، برآورد بیز پارامتر θ را تحت تابع زیان متعادل وزنی به دست می‌آوریم. همچنین پذیرفتنی بودن برآوردگرهای خطی پارامتر θ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان خواهیم داد که برآوردگرهای خطی به‌صورت $A\overline{T}(\boldsymbol{X})+B$ که در آن $\overline{T}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T(X_i)$، به‌ازای چه مقادیری از A و B ناپذیرفتنی هستند و در هر مورد مغلوب‌کننده‌های مناسب را ارائه می‌کنیم. به‌علاوه، برآوردگرهای بیزی سلسله‌مراتبی پارامتر θ را تحت تابع زیان متعادل وزنی با استفاده از توزیع‌های پیشین ناآگاهی‌بخش و همچنین توزیع‌های پیشین مزدوج به دست آورده و پذیرفتنی بودن آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در نهایت، برآوردگر بیز تجربی پارامتر مقیاس θ را به دست آورده و پذیرفتنی بودن آن را بررسی می‌کنیم.

واژگان کلیدی. خانواده‌ی نمایی؛ تابع زیان متعادل وزنی؛ برآوردگر بیزی؛ برآوردگر بیزی تجربی؛ برآوردگر بیزی سلسله‌مراتبی؛ پذیرفتنی بودن.

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات.

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

۱ مقدمه

فرض کنید X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازه‌ی n از توزیعی متعلق به زیرخانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها باشد که در بخش ۲ به معرفی آن می‌پردازیم. در این مقاله به بررسی برآورد پارامتر θ تحت تابع زیان وزنی متعادل ($WBLF$) به شکل کلّی

$$L_{WB}(\theta, \delta) = \frac{w}{n} q(\theta) \sum_{i=1}^{n} (T(X_i) - \delta(\boldsymbol{X}))^2 + (1-w) q(\theta) (\delta(\boldsymbol{X}) - \theta)^2, \quad (1)$$

می‌پردازیم که در آن $0 < w < 1$، $q(\theta) > 0$ و $\delta(\boldsymbol{X})$ برآوردگر پارامتر θ است. این تابع زیان در واقع تعمیمی از تابع زیان معرفی شده توسط زلنر (۱۹۹۴) است و به‌گونه‌ای طراحی شده است که به‌طور هم‌زمان دو معیار نیکویی برازش و همچنین دقت برآوردیابی را در برآورد پارامتر θ در نظر می‌گیرد. در تابع زیان‌های معمول مورد استفاده در اکثر تحلیل‌های آماری، تابع زیان مورد استفاده فقط یکی از دو معیار یاد شده را در نظر می‌گیرد. برای مثال، در مسئله‌ی برآوردیابی به‌روش کمترین توان‌های دوم، بیش‌تر مسئله‌ی نیکویی برازش مورد توجه می‌باشد حال آن‌که در استفاده از تابع زیان درجه‌ی دوم خطا، به‌دقت برآوردگر توجه می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود در تابع زیان متعادل وزنی (۱)، نخستین عبارت سمت راست بیانگر نیکویی برازش و دومین عبارت بیانگر دقت برآوردگر است. برای مطالعه‌ی بیش‌تر پیرامون تابع زیان‌های متعادل و خواص آن می‌توان به مقاله‌ی زلنر (۱۹۹۴) مراجعه کرد.

در سال‌های اخیر مطالعات مختلفی در رابطه با تابع‌های زیان متعادل و متعادل وزنی انجام شده است. برای مثال، رودریگرز و زلنر (۱۹۹۴) پس از معرفی تابع زیان متعادل وزنی، برآورد میانگین زمان شکست را تحت این تابع زیان ارائه می‌کنند. چانگ و کیم (۱۹۹۲)، برآوردهای همزمان میانگین‌های توزیع نرمال چندمتغیره را تحت تابع زیان متعادل به دست آوردند. همچنین چانگ، کیم و سانگ (۱۹۹۸) برآوردگرهای خطی میانگین یک توزیع پواسن را تحت تابع زیان متعادل و همچنین متعادل وزنی و با در نظرگرفتن وزن‌های مختلف مطالعه کردند. از سایر مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان به دِی، گوش و استرادرمن (۱۹۹۹)، شالبا (۲۰۰۱)، اوتانی (۱۹۹۹)، و سنجری و اصغرزاده (۲۰۰۳، ۲۰۰۴) اشاره کرد.

در این مقاله، در بخش ۲ ابتدا زیرخانواده‌ای نمایی از توزیع‌ها را معرفی و بعضی از خواص این خانواده را مطالعه می‌کنیم. همچنین $q(\theta)$ مناسب را به کمک کران پایین کرامر-رائو در این خانواده برای تابع زیان (۱) به دست می‌آوریم. در بخش ۳ صورت کلّی برآوردگر بیز پارامتر مقیاس θ را در زیرخانواده نمایی از توزیع‌ها تحت تابع زیان متعادل وزنی به دست می‌آوریم. همچنین تابع مخاطره و زیان بیزی برآوردگرهای خطی، به‌شکل $A\overline{T}(\boldsymbol{X}) + B$ را محاسبه می‌کنیم. در بخش ۴ پذیرفتنی بودن و ناپذیرفتنی بودن برآوردگرهای خطی $A\overline{T}(\boldsymbol{X}) + B$ را به‌ازای مقادیر مختلف A و B بررسی می‌کنیم. در بخش ۵ برآوردگر بیز تجربی

پارامتر مقیاس θ را به دست می‌آوریم و در بخش آخر پس از به دست آوردن برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی پارامتر مقیاس تحت پیشین‌های ناآگاهی‌بخش و مزدوج، پذیرفتنی بودن این برآوردگرها را مطالعه می‌کنیم.

۲ معرفی یک زیرخانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها

فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازه‌ی n از توزیعی با تابع چگالی احتمال $\frac{۱}{\tau}g(\frac{x}{\tau})$ باشد که در آن τ پارامتر مقیاس نامعلوم $(\tau > ۰)$ و g نیز تابعی معلوم است. گاهی اوقات تابع چگالی بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x;\theta) = \mathrm{c}(x)\theta^{-\vartheta}\exp\left\{-\frac{T(x)}{\theta}\right\}, \quad \theta > ۰, \tag{۲}$$

که در آن $\mathrm{c}(x)$ تابعی از x، $\theta = \tau^r$ و ϑ نیز مقداری ثابت و معلوم است. همچنین $T(X)$ یک آماره‌ی بسنده و کامل برای θ با توزیع $\mathrm{Gamma}(\vartheta,\theta)$ است. با توجه به مدل (۲)، تابع چگالی احتمال توأم نمونه‌ی تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_۱,\ldots,X_n)$ عبارت است از:

$$f(\boldsymbol{x};\theta) = \mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)\theta^{-n\vartheta}\exp\left\{-\frac{S(\boldsymbol{x})}{\theta}\right\}, \quad \theta > ۰, \tag{۳}$$

که در آن $\mathrm{c}(\boldsymbol{x},n) = \prod_{i=۱}^{n}\mathrm{c}(x_i)$، $\theta = \tau^r$ و $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=۱}^{n} T(X_i) = n\overline{T}(\boldsymbol{X})$، همچنین $T(\boldsymbol{X})$ یک آماره با توزیع $\mathrm{Gamma}(n\vartheta,\theta)$ است. مثال‌هایی از مدل (۳) عبارت‌اند از:

آ) توزیع گاما؛ $\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$ با αی معلوم و

$$\mathrm{c}(\boldsymbol{x},n) = \prod_{i=۱}^{n}\frac{x_i^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \mathrm{S}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=۱}^{n} X_i,$$

$$\vartheta = n\alpha, \qquad \theta = \beta(\tau = \beta, r = ۱),$$

با تابع چگالی احتمال توأم

$$f(\boldsymbol{x};\beta) = \left(\prod_{i=۱}^{n}\frac{x_i^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)}\right)\beta^{-n\alpha}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{\beta}\right\}, \qquad x_i > ۰, \qquad i = ۱,\ldots,n.$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

ب) توزیع نرمال؛ $N(\circ,\sigma^{۲})$ با

$$\mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)=(۲\pi)^{-\frac{n}{۲}},\qquad \mathrm{S}(\boldsymbol{X})=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}X_i^{۲},$$

$$\vartheta=\frac{n}{۲},\qquad \theta=\sigma^{۲}(\tau=\sigma,r=۲),$$

و تابع چگالی احتمال توأم

$$f(\boldsymbol{x};\sigma^{۲})=(۲\pi)^{-\frac{n}{۲}}(\sigma^{۲})^{-\frac{n}{۲}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right\},\qquad x_i\in\mathbb{R},\qquad i=۱,\ldots,n.$$

پ) توزیع گاوسی وارون؛ $\mathrm{IG}(\infty,\lambda)$ با

$$\mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)=\left(\prod_{i=۱}^{n}۲\pi x_i^{۳}\right)^{-\frac{۱}{۲}},\qquad \mathrm{S}(\boldsymbol{X})=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{X_i},$$
$$\vartheta=\frac{n}{۲},\qquad \theta=\frac{۱}{\lambda}(\tau=\lambda,r=-۱),$$

و تابع چگالی احتمال توأم

$$f(\boldsymbol{x};\lambda)=\left(\prod_{i=۱}^{n}۲\pi x_i^{۳}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\lambda^{\frac{n}{۲}}\exp\left\{-\lambda\frac{\sum\frac{۱}{x_i}}{۲}\right\},\qquad x_i>\circ,\qquad i=۱,\ldots,n.$$

ت) توزیع وایبل؛ $\mathrm{W}(\eta,\beta)$ با βی معلوم و

$$\mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)=\beta^{n}\prod_{i=۱}^{n}x_i^{\beta-۱},\qquad \mathrm{S}(\boldsymbol{X})=\sum_{i=۱}^{n}X_i^{\beta},$$
$$\vartheta=m,\qquad \theta=\eta^{\beta}(\tau=\eta,r=\beta),$$

و تابع چگالی احتمال توأم

$$f(\boldsymbol{x};\eta)=\beta^{n}\prod_{i=۱}^{n}x_i^{\beta-۱}\eta^{-m\beta}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{\beta}}{\eta^{\beta}}\right\},\qquad x_i>\circ,\qquad i=۱,\ldots,n.$$

ث) توزیع رایلی؛ $\mathrm{Rayleigh}(\beta)$ با

$$\mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)=\prod_{i=۱}^{n}x_i,\qquad \mathrm{S}(\boldsymbol{X})=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}X_i^{۲},$$
$$\vartheta=n,\qquad \theta=\beta^{۲}(\tau=\beta,r=۲),$$

و تابع چگالی احتمال توأم

$$f(\boldsymbol{x};\beta)=\left(\prod_{i=۱}^{n}x_i\right)\beta^{-۲n}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}}{۲\beta^{۲}}\right\}\qquad ,x_i>\circ,\qquad i=۱,۲,\ldots,n.$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

بعضی از خواص خانواده‌ی توزیع‌های (۲) و برآوردگرهای خطی پذیرفتنی پارامتر $\theta=\tau^r$ در این خانواده تحت تابع زیان آنتروپی توسط پارسیان و نعمت‌الهی (۱۹۹۶) ارائه شده است. همچنین جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲) برآوردگر مینیماکس پذیرفتنی پارامتر θ را در این خانواده از توزیع‌ها تحت تابع زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردا در فضاهای پارامتری از پایین کراندار به دست آورده‌اند. در این مقاله می‌خواهیم برآوردگر $\theta=\tau^r$ را تحت تابع زیان متعادل وزنی (۱) به دست آوریم که در آن $q(\theta)$ یک تابع مثبت مناسب از θ است. با استفاده از چگالی (۲) به‌راحتی می‌توان نشان داد که کران پایین کرامر-رائو در برآورد نااریب θ در این خانواده از توزیع‌ها برابر $\frac{\theta^{۲}}{\vartheta}$ است. بنا بر این، منطقی به‌نظر می‌رسد که در برآورد پارامتر $\theta=\tau^r$ تحت تابع زیان متعادل وزنی، $q(\theta)$ برابر $\frac{۱}{\theta^{۲}}$ در نظر گرفته شود. در این صورت تابع زیان متعادل وزنی (۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$L_{WB}(\theta,\delta(\boldsymbol{x}))=\frac{w}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{T(x_i)-\delta(\boldsymbol{x})}{\theta}\right)^{۲}+(۱-w)\left(\frac{\delta(\boldsymbol{x})}{\theta}-۱\right)^{۲},\tag{۴}$$

که در آن عبارت دوم سمت راست، مضربی از تابع زیان توان دوم خطاهای مقیاس ناوردا است.

۳ برآوردگر بیز پارامتر θ، تحت تابع زیان متعادل وزنی

در این بخش برآوردگر بیز پارامتر θ را تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴) به دست می‌آوریم. همچنین تابع مخاطره و زیان بیزی برآوردگرهای خطی $A\overline{T}(\boldsymbol{X})+B$ را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید توزیع گامای وارون با پارامترهای α و β و تابع چگالی احتمال زیر را به‌عنوان توزیع پیشین برای پارامتر θ در نظر بگیریم:

$$\pi(\theta)=\frac{\beta^{\alpha}\exp\left\{-\frac{k\beta}{\theta}\right\}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+۱}},\qquad \theta>۰,\quad \alpha,\beta>۰.\tag{۵}$$

با استفاده از لم ۱ و قضیه‌ی ۱ می‌توان برآوردگر بیز پارامتر مقیاس θ را در خانواده‌ی توزیع‌های (۱) تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴) به دست آورد.

لم ۱ برآوردگر بیز پارامتر θ تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴) عبارت است از:

$$\delta_{WB}(\boldsymbol{X})=w\overline{T}(\boldsymbol{X})+(۱-w)\delta_B(\boldsymbol{X}),\tag{۶}$$

که در آن $\overline{T}(\boldsymbol{X})=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}T(X_i)$ میانگین $T(X_i)$ها و $\delta_B(\boldsymbol{X})=\frac{E[\frac{۱}{\theta}|\boldsymbol{X}]}{E[\frac{۱}{\theta^{۲}}|\boldsymbol{X}]}$ برآوردگر بیز تحت تابع زیان توان دوم خطاهای مقیاس ناوردا است.

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

برهان. با استفاده از تابع زیان متعادل وزنی (۴) داریم:

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{x},\delta) &= E(L_{WB}(\theta,\delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{w}{n}\sum_{i=1}^{n}(T(X_i)-\delta(\boldsymbol{X}))^2 E\left(\frac{1}{\theta}\middle|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right) \\ &\quad + (1-w)E\left\{\left(\frac{\delta(\boldsymbol{X})}{\theta}-1\right)^2\middle|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right\}, \end{aligned}$$

و با حل معادله‌ی $\frac{d}{d\delta}r(\boldsymbol{x},\delta)=0$ نسبت به δ رابطه‌ی (۶) به دست می‌آید.

حال فرض کنید توزیع گامای وارون با تابع چگالی احتمال (۴) را به‌عنوان توزیع پیشین روی پارامتر θ در نظر بگیریم، به‌راحتی و با استفاده از تابع چگالی احتمال توأم (۳) می‌توان نشان داد توزیع پسین θ به شرط $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ نیز یک توزیع گامای وارون با پارامترهای $n\vartheta+\alpha$ و $\beta+n\overline{T}(\boldsymbol{x})$ است. بنا بر این، با استفاده از خواص توزیع گامای وارون و مستقیماً می‌توان نشان داد:

$$E\left(\frac{1}{\theta}\middle|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right)=\frac{n\vartheta+\alpha}{\beta+n\overline{T}(\boldsymbol{x})}, \tag{۷}$$

$$E\left(\frac{1}{\theta^2}\middle|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right)=\frac{(n\vartheta+\alpha)(n\vartheta+\alpha+1)}{\beta+n\overline{T}(\boldsymbol{x})}. \tag{۸}$$

حال با استفاده از رابطه‌های بالا و لم ۱ می‌توان قضیه‌ی زیر را به‌راحتی اثبات کرد.

قضیه‌ی ۱ برآوردگر بیز پارامتر θ در خانواده‌ی توزیع‌های (۲) تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴) و با در نظر گرفتن توزیع گامای وارون با تابع چگالی احتمال (۵) به‌عنوان توزیع پیشین روی پارامتر θ عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta_{WB}(\boldsymbol{X}) &= w\overline{T}(\boldsymbol{X})+(1-w)\frac{\beta+n\overline{T}(\boldsymbol{X})}{n\vartheta+\alpha+1} \\ &= A\overline{T}(\boldsymbol{X})+B, \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن

$$A=w+\frac{(1-w)n}{n\vartheta+\alpha+1}, \qquad B=\frac{(1-w)\beta}{n\vartheta+\alpha+1}.$$

در قضیه‌ی ۱ واضح است که $B>0$ و اگر $\vartheta\geqslant 1$، آنگاه $w<A<1$ و در غیر این صورت $w<A<A(w,\vartheta)=\frac{1}{\vartheta}-w\left(\frac{1}{\vartheta}-1\right)=w+\frac{1-w}{\vartheta}$.

در قضیه‌ی ۲ تابع مخاطره و مخاطره‌ی بیزی برآوردگرهای خطی به‌شکل $A\overline{T}(\boldsymbol{X})+B$ را تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴) ارائه می‌دهیم.

قضیه‌ی ۲ تابع مخاطره‌ی برآوردگر خطی $A\overline{T}(\boldsymbol{X})+B$ تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴) عبارت است از:

$$\begin{aligned} R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B) \;&=\; \frac{\vartheta}{n}\{(A-w)^{2}+w(n-w)\}+w\left\{(A-1)\vartheta+\frac{B}{\theta}\right\}^{2} \\ &\quad +(1-w)\left\{(A\vartheta-1)+\frac{B}{\theta}\right\}^{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

همچنین، مخاطره‌ی بیزی $A\overline{T}(X)+B$ تحت توزیع پیشین گامای وارون با تابع چگالی احتمال (۵) روی پارامتر θ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} r_{WB}(\pi, A\overline{T}+B) \;&=\; \frac{\vartheta}{n}\{(A-w)^{2}+w(n-w)\}+w\{(A-1)\vartheta\}^{2} \\ &\quad +(1-w)(A\vartheta-1)^{2}+2\{(A\vartheta-1)+w(1-\vartheta)\}\frac{\alpha B}{\beta} \\ &\quad +\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^{2}}B^{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

تذکر دو نکته در این‌جا ضروری است:

- در قضیه‌ی ۲ با قرار دادن $A=1$ و $B=0$ تابع مخاطره و زیان بیزی $\overline{T}(\boldsymbol{X})$ به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$R_{WB}(\theta,\overline{T})=\frac{\vartheta}{n}\{(1-w)^{2}+w(n-w)\}+(1-w)(\vartheta-1)^{2}, \tag{12}$$

و

$$r_{WB}(\pi,\overline{T})=\frac{\vartheta}{n}\{(1-w)^{2}+w(n-w)\}+(1-w)(\vartheta-1)^{2}. \tag{13}$$

- در قضیه‌ی ۲ به‌سادگی می‌توان فرمول‌هایی معادل را برای $R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B)$ ارائه کرد که در اثبات بعضی از خواص برآوردگرها در بخش‌های بعدی مفید باشند. دو صورت معادل برای رابطه‌ی (۱۰) در قضیه‌ی ۲ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B) \;&=\; \frac{\vartheta}{n}\{(A-w)^{2}+w(n-w)\}+\left\{(A-1)\vartheta+\frac{B}{\theta}\right\}^{2} \\ &\quad +(1-w)(\vartheta-1)\left(2A\vartheta-1-\vartheta+\frac{2B}{\theta}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

و

$$R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B) = \frac{\vartheta}{n}\{(A-w)^۲ + w(n-w)\} + \left\{(A\vartheta - ۱) + \frac{B}{\theta}\right\}^۲$$
$$+ w(۱-\vartheta)\left(۲A\vartheta - \vartheta - ۱ + \frac{۲B}{\theta}\right). \qquad (۱۵)$$

۴ پذیرفتنی بودن و ناپذیرفتنی بودن برآوردگرهای خطی $A\overline{T}+B$

در این بخش، رده‌ی برآوردگرهای خطی $A\overline{T}+B$ برای پارامتر مقیاس θ را در زیرخانواده‌ی نمایی توزیع‌های (۲) در نظر می‌گیریم و تمام برآوردگرهای ناپذیرفتنی پارامتر θ را مشخص و در هر مورد برای هر برآورد ناپذیرفتنی مغلوب‌کننده‌های مناسب معرفی می‌کنیم.

قضیه‌ی ۳ فرض کنید فضای پارامتر $\mathbb{R}^+$، یعنی $\Theta = (۰, \infty)$ و فضای عمل‌ها $[۰, \infty)$ باشد. در برآورد پارامتر θ در خانواده‌ی توزیع‌های (۲) تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴)، برآوردگر خطی $A\overline{T}(\boldsymbol{X})+B$ یک برآوردگر ناپذیرفتنی است هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

آ) $A < ۰$ یا $B < ۰$؛

ب) $A \neq A^*(\vartheta)$ و $B = ۰$؛

پ) $A > \max\{\frac{۱}{\vartheta}, ۱\}$ و $B \geqslant ۰$؛

ت) $\vartheta \geqslant ۱\ ;\ A = ۱$ و $B > ۰$؛

ث) $B \geqslant ۰\ ;\ A < w$ و $\vartheta = ۱$.

که در آن $A^*(\vartheta) = w + \frac{n(۱-w)}{n\vartheta+۱}$ است.

برهان.

آ) در این حالت $A\overline{T}+B$ می‌تواند مقادیر منفی را با احتمال مثبت اختیار کند و بنا بر این، $A\overline{T}+B$ در این حالت به‌وسیله‌ی $\max\{۰, A\overline{T}+B\}$ مغلوب می‌شود.

ب) اگر $B = ۰$ باشد می‌توان مقدار A را طوری تعیین کرد که $R_{WB}(\theta, A\overline{T})$ مینیمم مقدار خود را اختیار کند. به‌سادگی می‌توان نشان داد به‌ازای $A = A^*(\vartheta)$، $R_{WB}(\theta, A\overline{T})$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

کمترین مقدار خود را اختیار می‌کند. بنا بر این، اگر $A \neq A^*(\vartheta)$، آن‌گاه $A\overline{T}(X)$ توسط $A^*(\vartheta)\overline{T}$ مغلوب شده، و ناپذیرفتنی است.

پ) برای این حالت به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر $B \geqslant ۰$ و $\vartheta \geqslant ۱$ باشد به‌ازای $A > ۱$ و برای هر $\theta \in \Theta$،

$$R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B) > R_{WB}(\theta, \overline{T}).$$

بنا بر این، $A\overline{T}+B$ در این حالت توسط $\overline{T}$ مغلوب می‌شود. همچنین در حالتی که $\vartheta < ۱$ و $A > \frac{۱}{\vartheta}$ به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $\theta \in \Theta$،

$$R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B) > R\left(\theta, \frac{۱}{\vartheta}\overline{T}+B\right).$$

بنا بر این، $A\overline{T}+B$ در این حالت توسط $\frac{۱}{\vartheta}\overline{T}+B$ مغلوب می‌شود. با تلفیق دو نتیجه‌ی بالا می‌توان گفت در حالت کلّی $A\overline{T}+B$ به‌ازای $B \geqslant ۰$ و $A > \max\{\frac{۱}{\vartheta}, ۱\}$ ناپذیرفتنی است.

ت) در حالتی که $A = ۱$ و $B > ۰$ و $\vartheta \geqslant ۱$، می‌توان نشان داد که $A\overline{T}+B$ به‌وسیله‌ی $\overline{T}$ مغلوب می‌شود یعنی برای هر $\theta \in \Theta$، $R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B) > R_{WB}(\theta, \overline{T})$.

ث) در حالتی که $A < w$ و $B \geqslant ۰$ و $\vartheta = ۱$ به‌سادگی و با کمک روابط (۱۰) و (۱۲) و (۱۳) می‌توان نشان داد که برای هر $\theta \in \Theta$،

$$R_{WB}(\theta, A\overline{T}+B) > R_{WB}\left(\theta, w\overline{T} + \frac{B(۱-w)}{۱-A}\right).$$

بنا بر این، در این حالت $A\overline{T}+B$ توسط $w\overline{T} + \frac{B(۱-w)}{۱-A}$ مغلوب می‌شود.

در ادامه، مقادیر $(A,B) \in \mathbb{R}^۲$ را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که به‌ازای این مقادیر $A\overline{T}+B$ برآوردگر پذیرفتنی پارامتر θ در خانواده‌ی توزیع‌های (۲) تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴) باشد.

قضیه‌ی ۴ در برآورد پارامتر θ در خانواده‌ی توزیع‌های (۲) تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴)، $A\overline{T}+B$ یک برآوردگر پذیرفتنی است هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

آ) $\vartheta \geqslant ۱ \; ; \; w < A < ۱, \; B > ۰$؛

ب) $\vartheta < ۱ \; ; \; w < A < A(w,\vartheta), \; B > ۰$.

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

که در آن $A(w,\vartheta)=\frac{1}{\vartheta}-w(\frac{1}{\vartheta}-1)$.

برهان. همان‌طور که در قضیه‌ی ۱ نشان دادیم، برآوردگر بیز یکتای پارامتر θ، در خانواده‌ی توزیع‌های (۲)، تحت تابع زیان (۴) موقعی که توزیع پیشین روی θ به‌صورت (۵) تعریف می‌شود به‌صورت $A\overline{T}+B$ است که در آن

$$A=w+\frac{n(1-w)}{n\vartheta+\alpha+1},\qquad B=\frac{(1-w)\beta}{n\vartheta+\alpha+1}.$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) $\vartheta\geqslant 1$،

از آن‌جا که $0<w<1$، $\alpha>0$ و $n\geqslant 1$، در این حالت ضریب $\overline{T}$ یعنی A بین w و ۱ قرار دارد و همچنین $B>0$ و این نشان می‌دهد که برآوردگر بیز یکتای $A\overline{T}+B$ به‌ازای $1<A<w$ و $B>0$ در حالتی که $\vartheta\geqslant 1$، برآوردگری پذیرفتنی است.

(۲) $\vartheta<1$،

در این حالت می‌توان نشان داد $A=w+\frac{(1-w)n}{n\vartheta+\alpha+1}<A(w,\vartheta)$، همچنین واضح است که $A>w$. بنا براین، در این حالت ضریب $\overline{T}$ یعنی A بین w و $A(w,\vartheta)=\frac{1}{\vartheta}-w(\frac{1}{\vartheta}-1)$ و $B>0$ است و این نشان می‌دهد که در حالتی که $\vartheta<1$، $A\overline{T}+B$ به‌ازای $w<A<A(w,\vartheta)$ و $B>0$ برآوردگری پذیرفتنی برای θ است.

استدلال بیز حدی که به روش بلایت (۱۹۵۱) مشهور است، هر برآوردگر داده شده‌ی مورد نظر را به‌صورت دنباله‌ای از برآوردگرهای بیز سامان‌دهی می‌کند که تفاضل مخاطره‌ی بیزی آن‌ها با برآوردگر مورد نظر تحت مرتبه‌ی مناسبی به سمت صفر میل می‌کند. با استفاده از این روش، در قضیه‌ی زیر برآوردگری پذیرفتنی را ارائه می‌کنیم.

قضیه‌ی ۵ تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴)، $A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X})$ یک برآوردگر پذیرفتنی برای پارامتر θ است که در آن $A^*(\vartheta)=w+\frac{n(1-w)}{n\vartheta+1}$ در قضیه‌ی ۳ تعریف شده است.

برهان. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با استفاده از قضیه‌ی ۱ واضح است که $A^*(\vartheta)\overline{T}(X)$ حد دنباله‌ای از برآوردگرهای بیز (۹) نسبت به یک دنباله از توزیع‌های پیشین گامای وارون با پارامترهای $\frac{1}{m}$ و $\frac{1}{m}$ است (وقتی $m\to\infty$). در این حالت با در نظر گرفتن این توزیع پیشین و با کمک قضیه‌ی ۱، برآوردگر بیز

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

(۹) عبارت است از:

$$\begin{aligned}\delta_{WB}^{m}(\boldsymbol{X}) &= \left\{w+\frac{n(1-w)}{n\vartheta+\frac{1}{m}+1}\right\}\overline{T}(\boldsymbol{X})+\frac{(1-w)\frac{1}{m}}{n\vartheta+\frac{1}{m}+1}\\ &= A_m\overline{T}(\mathbf{X})+B_m.\end{aligned}$$

واضح است که $\lim_{m\to\infty}\delta_{WB}^{m}(\boldsymbol{X})=A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X})$.

حال با استفاده از نتیجه‌ی بالا و به‌کمک روش بلایت (۱۹۵۱) به‌راحتی می‌توان پذیرفتنی بودن $A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X})$ را نتیجه گرفت. بدین منظور، اگر تابع چگالی احتمال توزیع پیشین وارون گاما با پارامترهای $\frac{1}{m}$، $\frac{1}{m}$ را با $\pi_m(\theta)$ نشان دهیم، با استفاده از پیوستگی تابع مخاطره بر حسب θ، به‌سادگی معلوم می‌شود که به‌ازای یک $\theta_\circ\in\Theta$، $\varepsilon>0$،

$$\int_{\theta_\circ-\varepsilon}^{\theta_\circ+\varepsilon}\pi_m(\theta)d\theta\geqslant k\frac{(\frac{1}{m})^{\frac{1}{m}}}{\Gamma(\frac{1}{m})},$$

که در آن k یک عدد مثبت است.

از طرفی، با انتخاب $r_m=r(\pi_m,A_m\overline{T}+B_m)$، $r_m^*=r(\pi_m,A^*(\nu)\overline{T})$ و با استفاده از رابطه‌ی (۱۱) و برخی محاسبات ساده معلوم می‌شود که

$$r_m-r_m^*=\frac{1}{m}k_m,$$

که در آن $\lim_{m\to\infty}k_m=0$. بنا بر این،

$$\begin{aligned}\frac{\int_{\theta_\circ-\varepsilon}^{\theta_\circ+\varepsilon}\pi_m(\theta)\ d\theta}{r_m-r_m^*} &\geqslant \frac{\frac{(\frac{1}{m})^{\frac{1}{m}}k}{\Gamma(\frac{1}{m})}}{\frac{1}{m}k_m}\\ &=\frac{(\frac{1}{m})^{\frac{1}{m}}}{\Gamma(1+\frac{1}{m})}\cdot\frac{k}{k_m}\to\infty,\quad m\to\infty\end{aligned}$$

و این پذیرفتنی بودن برآوردگر $A^*(\nu)\overline{T}$ تحت تابع زیان (۴) را اثبات می‌کند.

در قضیه‌ی زیر، زیررده‌ی دیگری از یک برآوردگر پذیرفتنی را مشخص می‌کنیم.

قضیه‌ی ۶ در برآورد پارامتر θ در خانواده‌ی توزیع‌های (۲) تحت تابع زیان متعادل وزنی (۴)، $A\overline{T}+B$ یک برآوردگر پذیرفتنی است اگر $A=w$، $0<B<b(1-w)$، که در آن $b<0{,}4$.

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

برهان. با انتخاب $\eta = \frac{1}{\theta}$ و فرض این‌که η دارای توزیع پیشین (ناسره) با چگالی نرمالیده نشده‌ی زیر است:

$$\pi_m(\eta) = \eta^{m-1} \exp\left\{\frac{Bm}{1-w}\eta\right\}, \quad \eta > 0,$$

اگر A یک زیرمجموعه‌ی محدب ناتباهیده از $(0, \infty)$ باشد، می‌توان نشان داد m_0ی وجود دارد که برای $m \geqslant m_0$ و یک $\varepsilon > 0$،

$$\int_A \pi_m(\eta)\ d\eta \geqslant \varepsilon.$$

برآوردگر بیز θ نسبت به چگالی پیشین π_m تحت تابع زیان (۴) و با استفاده از رابطه‌ی (۹) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\delta^m_{WB}(\mathbf{X}) &= \left\{w + \frac{n(1-w)}{n\nu + m + 1}\right\}\overline{T} + \frac{Bm}{n\nu + m + 1} \\ &= A_m\overline{T} + B_m.\end{aligned}$$

با انتخاب $r_m = r(\pi_m, A_m\overline{T} + B_m)$، $r^*_m = r(\pi_m, w\overline{T} + B)$ و با استفاده از رابطه‌ی (۱۱) و برخی محاسبات ساده، می‌توان نشان داد که

$$r_m - r^*_m = \left(\frac{B}{1-w}\right)^m \frac{m^m}{\Gamma(m)} k^*_m.$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود که $\lim_{m\to\infty} \left(\frac{B}{1-w}\right)^m \frac{m^m}{\Gamma(m)}$ برابر صفر است اگر $b < \frac{B}{1-w}$ و این اثبات پذیرفتنی بودن برآوردگر $w\overline{T} + B$ که در آن $B < b(1-w)$ و $b < 0{,}4$ را اثبات می‌کند.
تذکر چند نکته در این‌جا ضروری است:

- با استفاده از رابطه‌ی (۱۰)

$$\begin{aligned}R_{WB}(\theta, A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X})) &= \frac{\vartheta}{n}\{(A^*(\vartheta) - w)^2 + w(n-w)\} + w\{(A^*(\vartheta) - 1)\vartheta\}^2 \\ &\quad + (1-w)\{(A^*(\vartheta)\vartheta - 1)\}^2,\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که $R_{WB}(\theta, A^*(\vartheta)\overline{T})$ مقداری ثابت و مستقل از θ است و همچنین این برآوردگر یک برآوردگر پذیرفتنی بیز است. بنا بر این، می‌توان به‌راحتی نتیجه گرفت $A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X})$ یک برآوردگر مینیماکس پذیرفتنی برای پارامتر θ است.

- در حالتی‌که X_1، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از خانواده‌ی توزیع‌های (۲) باشد به‌راحتی می‌توان نشان داد که پیشین جفریز برابر $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta}$ است و برآوردگر بیز پارامتر θ تحت تابع زیان (۴) عبارت است از:

$$\delta_J(\boldsymbol{X}) = w\overline{T}(\boldsymbol{X}) + (1-w)\delta_B(\boldsymbol{X}),$$

که در آن

$$\delta_B(\boldsymbol{X}) = \frac{E(\frac{1}{\theta}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})}{E(\frac{1}{\theta^2}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})}.$$

از طرفی توزیع پسین θ، با در نظر گرفتن پیشین جفریز، یک توزیع گامای وارون با پارامترهای $n\vartheta$ و $n\overline{T}$ است. به‌سادگی معلوم می‌شود که $\delta_B(\boldsymbol{X}) = \frac{n}{n\vartheta+1}\overline{T}(\boldsymbol{X})$ و برآوردگر بیز θ تحت تابع زیان (۴) و با در نظر گرفتن پیشین جفریز عبارت است از:

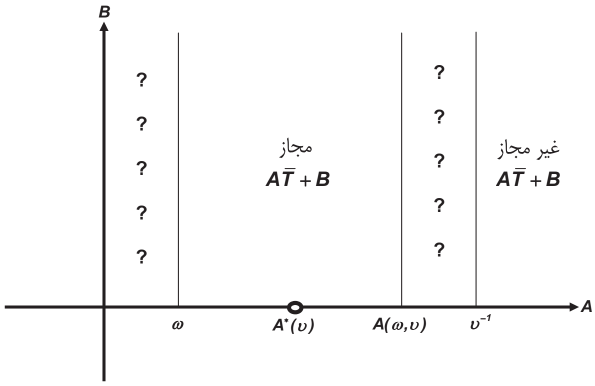
$$\begin{aligned}\delta_J(X) &= w\overline{T}(\boldsymbol{X}) + (1-w)\frac{n\overline{T}(\boldsymbol{X})}{n\vartheta+1}\\ &= \left\{w + \frac{n(1-w)}{n\vartheta+1}\right\}\overline{T}(\boldsymbol{X})\\ &= A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X}).\end{aligned}$$

بنا بر این، $A^*(\vartheta)\overline{T}(X)$ یک برآوردگر بیز تعمیم‌یافته تحت توزیع پیشین جفریز است که برای θ مینیماکس و پذیرفتنی است.

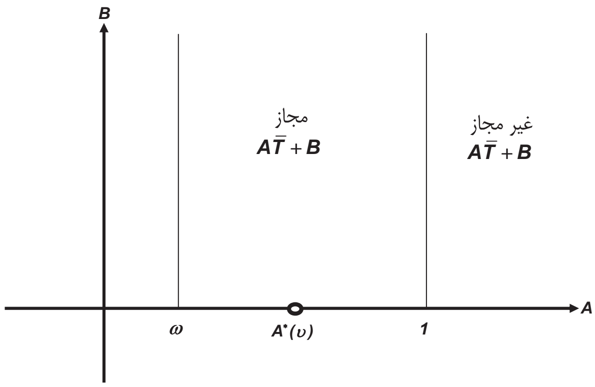
- با توجه به قضیه‌ی ۴ می‌توان نتیجه گرفت که برآوردگرهای خطی $A^*(\vartheta)\overline{T} + B$ برای $B > 0$، برآوردگرهای پذیرفتنی پارامتر θ نیز هستند.

- با استفاده از قضایای ۳ و ۴ می‌توان فضای $\mathbb{R}^2$ را به ناحیه‌های مختلف تقسیم کرد به‌طوری‌که به‌ازای مقادیر (A, B) در آن ناحیه‌ها، برآوردگرهای به‌شکل $A\overline{T} + B$ در برآورد پارامتر θ، پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی هستند. نمودارهای (آ)، (ب)، و (پ) این ناحیه‌ها را نشان می‌دهند.

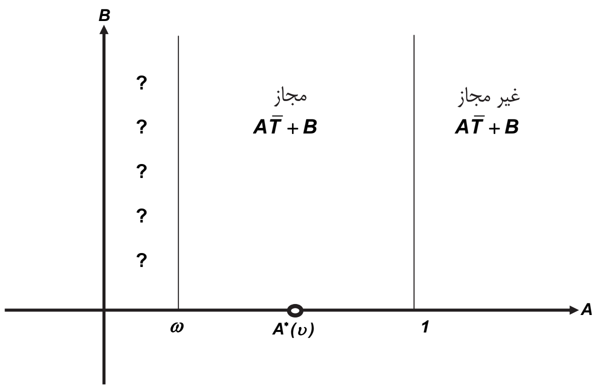
- با توجه به نمودارهای (آ)، (ب)، و (پ)، پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن $A(w,\vartheta)\overline{T} + B$ به‌ازای $\vartheta < 1$، $w\overline{T} + B$، $B > b(1-w)$، $b \geqslant 0{,}4$، $\frac{1}{\vartheta}\overline{T} + B$، $\vartheta < 1$ و همچنین ناحیه‌های که با علامت سؤال مشخص شده است به‌عنوان مسئله‌ی باز مطرح می‌شود.



آ) $\vartheta < 1$



ب) $\vartheta = 1$



پ) $\vartheta > 1$

۵ برآوردگر بیز تجربی پارامتر مقیاس θ

در این بخش نخست برآوردگر بیز تجربی پارامتر مقیاس θ را در خانواده‌ی توزیع‌های (۲) به دست می‌آوریم، سپس پذیرفتنی بودن این برآوردگر را مطالعه می‌کنیم. فرض کنید X_1، X_2، $\ldots$، X_n نمونه‌ای تصادفی از خانواده‌ی توزیع‌های (۲) با تابع چگالی احتمال توأم (۳) باشد، همچنین فرض کنید θ دارای توزیع پیشین گامای وارون با تابع چگالی احتمال (۵) باشد که در آن α معلوم و β نامعلوم است. همان‌طور که در قضیه‌ی ۱ نشان دادیم برآوردگر بیز پارامتر θ تحت تابع زیان (۴) و با در نظرگرفتن توزیع پیشین گامای وارون عبارت است از:

$$\delta_{WB}(\boldsymbol{X}) = \left\{w + \frac{n(1-w)}{n\vartheta+\alpha+1}\right\}\overline{T}(\boldsymbol{X}) + \frac{(1-w)\beta}{n\vartheta+\alpha+1}. \tag{۱۶}$$

برای محاسبه‌ی برآوردگر بیز تجربی کافی است برآورد ماکسیمم درستنمایی β را محاسبه و در رابطه‌ی بالا جایگزین کنیم. برای این منظور و با کمک رابطه‌های (۳) و (۵) داریم:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\boldsymbol{x};\beta) &= \int_0^\infty f_\theta(\boldsymbol{x})\pi_{\alpha,\beta}(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^\infty \mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)\theta^{-n\vartheta}\, \exp\left\{-\frac{n\overline{T}(\boldsymbol{x})}{\theta}\right\}\cdot\frac{\exp\{-\frac{\beta}{\theta}\}\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+1}}\, d\theta \\ &= \frac{\mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(n\vartheta+\alpha+1)}{(\beta+n\overline{T}(\boldsymbol{x}))^{n\vartheta+\alpha}}. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

بنا بر این، تابع درستنمایی $L(\beta)$ عبارت است از $L(\beta)=f_\alpha(\boldsymbol{x};\beta)$ که در (۱۷) تعریف شده است. حال با ماکسیمم کردن $\ell(\beta)=\ln L(\beta)$ نسبت به β برآورد ماکسیمم درستنمایی β به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\beta}_{\mathrm{ML}} = \frac{\alpha}{\vartheta}\overline{T}(\boldsymbol{x}). \tag{۱۸}$$

حال با جایگزین کردن مقدار $\hat{\beta}_{\mathrm{ML}} = \frac{\alpha}{\vartheta}\overline{T}(\boldsymbol{x})$ در رابطه‌ی (۱۶)، برآورد بیز تجربی پارامتر θ تحت تابع زیان (۴) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta_{WB}^{EB}(\boldsymbol{x}) &= \left\{w + \frac{n(1-w)}{n\vartheta+\alpha+1}\right\}\overline{T}(\boldsymbol{x}) + \frac{1-w}{n\vartheta+\alpha+1}\cdot\frac{\alpha}{\vartheta}\overline{T}(\boldsymbol{x}) \\ &= \left\{w + \frac{1-w}{n\vartheta+\alpha+1}\left(n+\frac{\alpha}{\vartheta}\right)\right\}\overline{T}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{۱۹}$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

با توجه به رابطه‌ی (۱۹) واضح است که δ_{WB}^{EB}، برآورد بیز تجربی پارامتر θ، به‌شکل $A\overline{T}(\boldsymbol{X})$ است و با استفاده از قسمت (۲) قضیه‌ی ۳ از آن‌جا که

$$w + \frac{۱ - w}{n\vartheta + \alpha + ۱}\left(n + \frac{\alpha}{\vartheta}\right) \neq A^*(\vartheta),$$

نتیجه می‌شود که برآوردگر بیز تجربی پارامتر θ، یک برآوردگر ناپذیرفتنی است.

۶ برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی پارامتر θ

در این بخش برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی پارامتر مقیاس θ را در خانواده‌ی توزیع‌های (۲) تحت تابع زیان (۴) به دست می‌آوریم. برای این منظور فرض کنید $\pi_\alpha(\theta|\beta)$ توزیع پیشین گامای وارون با پارامترهای αی معلوم و β نامعلوم با تابع چگالی احتمال (۵) باشد که روی پارامتر θ تعریف می‌شود. همچنین فرض کنید $X_۱$، $\ldots$، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازه‌ی n از خانواده‌ی توزیع‌های (۲) با تابع چگالی احتمال توأم (۳) باشد. در این بخش به دو روش، برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی پارامتر θ را به دست می‌آوریم. فرض کنید $\Psi(\beta)$ تابع چگالی احتمال در نظر گرفته شده برای β باشد.

۶٫۱ برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی θ با استفاده از توزیع ناآگاهی‌بخش برای β

با استفاده از رابطه‌ی (۵) به‌راحتی می‌توان نشان داد:

$$\mathrm{I}(\beta) = -E\left(\frac{d^۲ \ln \pi_\alpha(\theta|\beta)}{d\beta^۲}\right) = \frac{\alpha}{\beta^۲}. \tag{۲۰}$$

بنا بر این، توزیع پیشین جفریز برای β عبارت است از:

$$\Psi^J(\beta) = \frac{۱}{\beta}.$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

با استفاده از این توزیع پیشین برای β و با استفاده از رابطه‌ی (۵) داریم:

$$\begin{aligned} \pi_\alpha^J(\theta) &= \int_\circ^\infty \pi_\alpha(\theta|\beta)\Psi^J(\beta)\ d\beta \\ &= \int_\circ^\infty \frac{\exp\{\frac{-\beta}{\theta}\}\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+۱}}\cdot\frac{۱}{\beta}\ d\beta \\ &= \frac{۱}{\alpha\theta}. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

پس با استفاده از رابطه‌ی (۶) در لم ۱ و از آن‌جا که با در نظر گرفتن $\pi_\alpha^J(\theta)$ به‌عنوان توزیع پیشین روی θ توزیع پسین θ، گامای وارون با پارامترهای $n\vartheta$ و $n\overline{T}(\boldsymbol{x})$ است، می‌توان نشان داد که برآورد بیز سلسله‌مراتبی θ در این حالت عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta_{WB}^H(\boldsymbol{x}) &= w\bar{x}+(۱-w)\frac{E(\frac{۱}{\theta}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})}{E(\frac{۱}{\theta^۲}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})} \\ &= w\bar{x}+(۱-w)\cdot\frac{n\vartheta}{n\overline{T}(\boldsymbol{x})}\cdot\frac{\{n\overline{T}(\boldsymbol{x})\}^۲}{n\vartheta(n\vartheta+۱)} \\ &= \left\{w+\frac{(۱-w)n}{n\vartheta+۱}\right\}\overline{T}(\boldsymbol{x}) = A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

پس در این حالت نیز برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی θ، به‌صورت $A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X})$ است که با توجه به قضیه‌ی ۵ یک برآوردگر پذیرفتنی برای پارامتر θ است. بنا بر این، می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه‌ی ۷ فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از خانواده‌ی توزیع‌های (۲) با تابع چگالی احتمال توأم (۳) باشد. همچنین فرض کنید $\pi_\alpha(\theta|\beta)$ با تابع چگالی احتمال (۵) توزیع پیشین گامای وارون با αی معلوم و β نامعلوم برای θ باشد. با در نظر گرفتن پیشین جفریز برای β، برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی θ تحت تابع زیان (۴) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta_{WB}^H(\boldsymbol{X}) &= \left\{w+\frac{n(۱-w)}{n\vartheta+۱}\right\}\overline{T}(\boldsymbol{X}) \\ &= A^*(\vartheta)\overline{T}(\boldsymbol{X}). \end{aligned}$$

که، یک برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی برای θ نیز می‌باشد.

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.123]

۶٫۲ برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی θ با استفاده از توزیع گاما برای β

در این بخش فرض می‌کنیم X_1، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازه‌ی n از توزیع (۲) با تابع چگالی احتمال توأم (۳) و θ نیز دارای توزیع (۵) با αی معلوم و β نامعلوم باشد. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که β دارای توزیع گاما با پارامترهای r و s باشد که در آن r و s معلوم هستند. به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}|\theta) &= \mathrm{c}(\boldsymbol{x},n)\theta^{-n\vartheta}e^{-\frac{n\overline{T}(x)}{\theta}} \\ \pi_\alpha(\theta|\beta) &= \frac{\exp\{-\frac{\beta}{\theta}\}\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+1}} \\ \Psi(\beta) &= \frac{\exp\{-\frac{\beta}{r}\}\beta^{s-1}}{\Gamma(s)r^{s}}. \end{aligned}$$

بنا بر این،

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(\theta) &= \int_0^\infty \pi_\alpha(\theta|\beta)\Psi(\beta)\, d\beta \\ &= \int_0^\infty \frac{\exp\{\frac{-\beta}{\theta}\}\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+1}}\cdot\frac{\exp\{\frac{-\beta}{r}\}\beta^{s-1}}{\Gamma(s)r^{s}}\, d\beta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(s)}\left(\frac{1}{r}\right)^{s}\frac{\theta^{s-1}}{(1+\frac{\theta}{r})^{\alpha+s}}. \end{aligned} \tag{۲۲}$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۲۲) و (۳)، می‌توان نشان داد که توزیع پسین θ به‌شرط $\boldsymbol{X}$ به‌صورت زیر است:

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \frac{\theta^{s-(n+1)}}{(1+\frac{\theta}{r})^{\alpha+s}}\cdot\exp\left\{-\frac{n\overline{T}(\boldsymbol{x})}{\theta}\right\}.$$

پس با استفاده از رابطه‌ی (۶) و جایگزین کردن $E(\frac{1}{\theta}|X=\boldsymbol{x})$ و $E(\frac{1}{\theta^2}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})$ برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی θ، در این حالت عبارت است از:

$$\delta_{WB}^{H}(\boldsymbol{X}) = w\overline{T}(\boldsymbol{X}) + (1-w)\frac{\int_0^\infty \frac{\theta^{s-(n+2)}}{(1+\frac{\theta}{r})^{\alpha+s}}\exp\{-\frac{n\overline{T}(\boldsymbol{X})}{\theta}\}\, d\theta}{\int_0^\infty \frac{\theta^{s-(n+3)}}{(1+\frac{\theta}{r})^{\alpha+s}}\exp\{-\frac{n\overline{T}(\boldsymbol{X})}{\theta}\}\, d\theta}. \tag{۲۳}$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود نمی‌توان آن را به‌صورت صریح و با یک صورت بسته بیان کرد و برای محاسبه‌ی آن نیاز به استفاده از روش‌های عددی داریم.

مرجع‌ها

Blyth, C.R. (1951). On minimax statistical decision procedures and their admissibility. *Ann. Math. Statist.* **22**, 22-42.

Chung, Y.; Kim, C. (1997). Simultaneous estimation of the multivariate normal mean under balanced loss function. *Comm. Statist. Theory Methods* **26**, 1599-1611.

Chung, Y.; Kim, C., Song, S. (1998). Linear estimators of a Poisson mean under balanced loss functions. *Statist. Decisions* **16**, 245-258.

Jafari Jozani, M.; Nematollahi, N.; Shafie, K. (2002). An admissible minimax estimator of a bounded scale parameter in a subclass of the exponential family under scale-invariant squared-error loss. *Statist. Prob. Lett.* **60**, 437-444.

Dey, D.; Ghosh, M.; Strawderman, W. (1999). On estimation with balanced loss function. *Statist. Prob. Lett.* **45**, 97-101.

Ohtani, K. (1999). Inadmissibility of the Stein rule estimator under the balanced loss function. *Econometrics J.* **88**, 193-201.

Parsian, A.; Nematollahi, N. (1996). Estimation of scale parameter under entropy loss function. *J. Stat. Plann. Inference* **52**, 77-91.

Rodrigues, J.; Zellner, A. (1994). Weighted balanced loss function and estimation of mean to failure. *Comm. Stat. Theory Methods* **23**, **12**, 3609-3616.

Sanjari Farsipour, N.; Asgharzadeh, A. (2003). Estimation of a normal mean relative to balanced loss function. *J. Stat. Theory Appl.* **2**, **2**, 190-197.

Sanjari Farsipour, N.; Asgharzadeh, A. (2004). Estimation of a normal mean relative to balanced loss function, *Statist. Papers.* **45**, 279-286.

Shalabh (2001). Least square estimators in measurment error models under the balanced loss function. *Test* **10**, 301-308.

Zellner, A. (1994). Bayesian and non-Bayesian estimation using balanced loss function. In *Statistical decision theory and related topics* **V**, Gupta, S.; Berger, J. eds., Springer, New York, 377-390.

دریافت: ۱۸ مهر ۱۳۸۳
آخرین اصلاح: ۹ مهر ۱۳۸۴

احمد پارسیان
دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه صنعتی اصفهان،
اصفهان، ایران.
پیام‌نگار: ahmad_p@iut.ac.ir

محمد جعفری جوزانی
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه شهید بهشتی،
اوین، بلوار دانشگاه،
تهران، ایران.
پیام‌نگار: m_jafari@cc.sub.ac.ir