



k-out-of-n سیستم‌های پراکندگی

بهاءالدین خالدی

دانشگاه شهید بهشتی، دانشگاه رازی کرمانشاه

چکیده. ساده‌ترین و معمول‌ترین روش برای مقایسه‌ی دو متغیر تصادفی استفاده از میانگین‌ها و واریانس‌های است. در بسیاری از حالت‌ها ممکن است میانه‌ی متغیر تصادفی X بزرگ‌تر از میانه‌ی متغیر تصادفی Y باشد در صورتی که میانگین X کوچک‌تر از میانگین Y است. مسئله‌ی مشابه وقتی اتفاق می‌افتد که هدف، مقایسه‌ی پراکندگی جامعه‌ها باشد. اگر X و Y بر طبق یک ترتیب تصادفی مناسب مرتب شده باشند ناهمانگی بالا بوجود نمی‌آید. در بسیاری از حالت‌ها مقایسه‌ی مشخصات تابعی از توزیع‌های احتمال تحت مطالعه، مانند توابع توزیع، توابع نزخ خطر، توابع میانگین باقیمانده، توابع معکوس یا توابع چندک و توابع مناسب دیگر بسیار مفیدتر از مقایسه بر اساس چند معیار عددی از توزیع‌های است. مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی با استفاده از توابع یاد شده در بالا معمولاً ترتیبی جزئی میان توزیع‌های احتمال بوجود می‌آورد. این مقایسه‌ها را ترتیب تصادفی می‌نامیم. در این مقاله ضمن ارائه مفاهیم و قضیه‌های مرتب با نظریه‌ی ترتیب پراکندگی، مثال‌ها و کاربردهای از نظریه‌ی یاد شده ارائه می‌شود. به طور خاص به مقایسه‌ی تصادفی آماره‌های مرتب و فاصله‌ها با استفاده از نظریه‌ی بالا می‌پردازیم. همچنین حالت‌هایی که مشاهدات توزیع یکسان داشته باشند یا نه، مورد مطالعه قرار می‌گیرند و در بیشتر حالت‌ها فرض می‌کنیم که مشاهدات مستقل‌اند.

وازگان کلیدی. توزیع نمایی؛ ترتیب تصادفی معمول؛ ترتیب نزخ خطر؛ ترتیب نسبت درستخایی؛ مدل‌های نزخ خطر متناسب؛ ترتیب بیشاندن؛ و p -بزرگ‌تر؛ تابع‌های شور؛ سیستم‌های k -out-of- n ؛ فاصله‌ها.

۱ مقدمه

پدیده‌های تصادفی، اغلب پیچیده‌اند. مدل‌سازی آن‌ها و تعیین کران‌ها و تقریب‌ها برای مشخصه‌های مورد توجه و مهم آن مدل‌ها از دیدگاه کاربردی مهم و مفیدند. به عبارت دیگر، تقریبی از یک مدل تصادفی با استفاده از یک مدل ساده‌تر و یا به‌وسیله‌ی یک مدل که از مؤلفه‌های ساده تشکیل شده است می‌تواند کران‌ها و تقریب‌های مناسبی از برخی مشخصه‌های خاص و مطلوب مدل مطالعه به‌دست دهد. ایده‌ی ترتیب تصادفی نخستین بار توسط لی من (۱۹۵۵) ارائه شد و با گذشت سال‌ها برای مقایسه توزیع‌های احتمال، چندین ترتیب تصادفی مختلف معرفی شده است. در این مقاله، توجه خود را بر ترتیب پراکنده‌ی که یک ترتیب جزئی مفید برای مقایسه‌ی پراکنده‌ی توزیع‌های احتمال است معطوف می‌سازیم و چندین مثال از آماره‌ها که با ترتیب پراکنده‌ی مرتب می‌شوند ارائه می‌کنیم.

ابتدا ترتیب‌های تصادفی مورد نیاز در این مقاله را مرور می‌کنیم.تابع چگالی احتمال، تابع توزیع احتمال، تابع بقا و نز خرابی متغیرهای تصادفی X و Y را به ترتیب با f , G , F , g , r_F , \overline{G} و \overline{F} و r_G نشان می‌دهیم. در سراسر این مقاله «صعوڈی» به معنای غیر نزولی و «نزولی» به معنای غیر صعوڈی است.

تعریف ۱ متغیر تصادفی Y در ترتیب تصادفی معمولی از X کوچک‌تر است ($Y \leq_{st} X$) اگر برای هر x داشته باشیم:

$$(1) \quad \overline{G}(x) \leq \overline{F}(x).$$

از (۱) نتیجه می‌شود که برای هر $(1, p) \in \mathbb{R}^+$

$$G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p),$$

و به همین ترتیب برای هر تابع صعوڈی $R \rightarrow R$ که امید ریاضی آن نسبت به X و Y موجود باشد:

$$(2) \quad E\{\phi(Y)\} \leq E\{\phi(X)\}.$$

یک نظریه‌ی قوی‌تر از ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نز خطر (hazard rate ordering) است.

تعریف ۲ می‌گوییم متغیر تصادفی Y در ترتیب نز خطر از X کوچک‌تر است ($Y \leq_{hr} X$) اگر

$$(3) \quad \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)}$$

نسبت به x صعوڈی باشد.

فرض کنید X_t متغیر تصادفی توصیف کنندهٔ باقیماندهٔ طول عمر یک متغیر تصادفی X در $t < X$ باشد. به عبارت دیگر، $X_t = X - t | X > t$ هم توزیع است و دارای تابع بقای $\frac{F(x+t)}{F(x)}$ است. بنابراین، $Y_{st} \leqslant X_{hr}$ اگر و فقط اگر برای هر $t > 0$ داشته باشیم $Y_t \leqslant X_t$. به بیان دیگر، توزیع‌های شرطی، به شرط آن‌که متغیرهای تصادفی دست کم از یک اندازهٔ معین هستند، طبق ترتیب تصادفی معمولی مرتب می‌شوند. در حالتی که نزخ‌های خطر موجود باشند، $Y_{hr} \leqslant X_{hr}$ و فقط اگر برای هر x ، $r_F(x) \leqslant r_G(x)$. ترتیب بر اساس نزخ خطر به ترتیب تصادفی بکنواخت نیز مشهور است.

تعریف ۳ می‌گوییم متغیر تصادفی Y در ترتیب نسبت درستنمایی از X کوچک‌تر است ($Y \leqslant_{lr} X$) اگر $\frac{f(x)}{g(x)}$ نسبت به x صعودی باشد. هنگامی که تکیه‌گاه‌های X و Y دارای یک نقطهٔ پلیانی مشترک در سمت چپ هستند داریم:

$$Y \leqslant_{lr} X \quad \Rightarrow \quad Y \leqslant_{hr} X \quad \Rightarrow \quad Y \leqslant_{st} X.$$

برای جزئیات بیشتر به لی من و روهو (۱۹۹۲) مراجعه شود.
اکنون ترتیب تصادفی چندمتغیره میان دو بردار تصادفی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴ بردار تصادفی $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ در ترتیب تصادفی چندمتغیره کوچک‌تر از بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ است ($\mathbf{Y} \leqslant_{st} \mathbf{X}$) اگر برای هر تابع صعودی $\phi : R^n \rightarrow R$ داشته باشیم:

$$\phi(\mathbf{Y}) \leqslant_{st} \phi(\mathbf{X}).$$

ترتیب تصادفی چندمتغیره، ترتیب تصادفی مؤلفه به مؤلفه را نتیجه می‌دهد. در این مقاله از مفهوم بیشاندن (majorization) نیز استفاده می‌شود که آن را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\{x_{(1)} \leqslant \dots \leqslant x_{(n)}\}$ نمایشگر ترتیب صعودی از مؤلفه‌های بردار (x_1, \dots, x_n) باشد. می‌گوییم بردار \mathbf{x} بردار \mathbf{y} را می‌بیشاند ($\mathbf{x} \succ_{st} \mathbf{y}$) اگر برای هر j ، $j = 1, 2, \dots, n-1$ ، $\sum_{i=1}^j x_{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^j y_{(i)}$. تابعی که رابطهٔ ترتیب بیشاندن را حفظ کند تابع محدب شور (schur convex) است. برای جزئیات بیشتر به مارشال و اولکین (۱۹۷۹) نگاه کنید. بردار \mathbf{x} بردار \mathbf{y} را به‌طور ضعیف می‌بیشاند ($\mathbf{x} \succ_w \mathbf{y}$) اگر برای هر j ، $j = 1, 2, \dots, n$ ، $x_{(j)} \leqslant y_{(j)}$.

$$\sum_{i=1}^j x_{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^j y_{(i)}.$$

بن و پالتانه (۱۹۹۹) به ترتیب تازه‌ای در \mathbb{R}^{+n} پرداختند که آن را p -بزرگ‌تر (p -larger) نامیدند. بردار x در \mathbb{R}^{+n} , p -بزرگ‌تر از بردار y در \mathbb{R}^{+n} است ($x \succ_p^p y$) اگر برای هر j , $j = 1, 2, \dots, n$

$$\prod_{i=1}^j x_{(j)} \leq \prod_{i=1}^j y_{(j)}.$$

مارشال و الکین (۱۹۷۹) ثابت کردند که برای هر تابع مغفر g :

$$x \succ^m y \Rightarrow (g(x_1), \dots, g(x_n)) \succ^w (g(y_1), \dots, g(y_n)),$$

و چون تابع لگاریتم یک تابع محدب است داریم:

$$x \succ^m y \Rightarrow x \succ^p y,$$

که عکس آن برقرار نیست. برای مثال روشن است که $(1, 2, 3) \succ^p (1, 1, 5)$, ولی رابطه‌ی بیشاندن برقرار نیست.

یک مفهوم بنیادی برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال، ترتیب پراکندگی است که در زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵ می‌گوییم متغیر تصادفی Y در ترتیب پراکندگی از X کوچکتر است ($Y \leq X$) اگر

$$(4) \quad G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha) \leq F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha), \quad 0 < \alpha \leq \beta < 1$$

همچنین در صورت وجود تابع‌های چگالی احتمال، $Y \underset{\text{disp}}{\leq} X$ اگر و فقط اگر برای هر $(1, p) \in \mathbb{R}^2$ داشته باشیم:

$$f(F^{-1}(p)) \leq g(G^{-1}(p)).$$

همچنین $X, Y \underset{\text{disp}}{\leq} X$, اگر و فقط اگر رابطه‌های هم‌ارز زیر برقرار باشند:

$$(i) \quad F^{-1}G(x) - x \text{ نسبت به } x \text{ صعودی باشد؛}$$

(b) اگر توابع چگالی احتمال موجود باشند، برای هر $(1, p) \in \mathbb{R}^2$

$$(5) \quad r_F(F^{-1}(p)) \leq r_G(G^{-1}(p)).$$

(ج) برای هر $(1, p) \in \mathbb{R}^2$

$$Y_{G^{-1}(p)} \underset{\text{st}}{\leq} X_{F^{-1}(p)}.$$

داسمن (۱۹۶۹) وقتی روی کارایی آزمون‌های ناپارامتری کاملاً صحیح در حال مطالعه بود، این نوع ترتیب را ترتیب دنباله‌ای نامید. یاناگیموتو و سیبویا (۱۹۷۶) ثابت کردند اگر (4) برقرار باشد X به طور تصادفی از Y پخش‌تر است. ساندرز و موران (۱۹۷۸)، بیکل و لی من (۱۹۷۹)، لویس و تامپسون (۱۹۸۱) و شیکد (۱۹۸۲) این نوع ترتیب را به عنوان یک ترتیب تصادفی برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال مورد مطالعه قرار دادند. دشپانده و کوچار (۱۹۸۳) هم ارزی میان این مقایسه‌ها را بررسی کردند و برخی ارتباطات موجود میان ترتیب پراکندگی و برخی دیگر از ترتیب‌های خاص را مورد توجه قرار دادند. دشپانده و کوچار (۱۹۸۲) و دشپانده و متا (۱۹۸۲) از ترتیب پراکندگی در برخی از مسائل استنباطی برای بدست آوردن کران‌هایی برای کارایی آزمون‌ها و احتمال‌های انتخاب‌های صحیح استفاده کردند. در ادامه به برخی از خصیت‌های مهم ترتیب پراکندگی اشاره می‌شود.

خاصیت ۱. ترتیب پراکندگی نسبت به تغییرات مکانی پایدار است:

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow Y + c \underset{disp}{\leqslant} X + d \quad \text{برای هر } c \text{ و } d \text{ حقیقی،}$$

خاصیت ۲. بازی $\sigma > 1$. $X \underset{disp}{\leqslant} \sigma X$

خاصیت ۳. $Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow -Y \underset{disp}{\leqslant} -X$

خاصیت ۴. لویس و تامپسون (۱۹۸۱) نشان داده‌اند که اگر Z متغیری تصادفی و مستقل از X و Y باشد و آنگاه $Y + Z \underset{disp}{\leqslant} X + Z$ اگر و فقط اگر Z دارای تابع چگالی لگ کاو (log-concave) باشد.

خاصیت ۵. اگر تکیه‌گاه‌های X و Y دارای نقطه‌ی چپ پایانی مشترک باشند، آنگاه

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow Y \underset{st}{\leqslant} X.$$

خاصیت ۶. روهو و هی (۱۹۹۱) نشان داده‌اند که اگر $X \underset{st}{\leqslant} Y$ و $Y \underset{disp}{\leqslant} X$ ، آنگاه بازی هر تابع صعودی محدب و یا نزولی مقعر ϕ ،

$$\phi(Y) \underset{disp}{\leqslant} \phi(X).$$

خاصیت ۷. بازی هر تابع محدب ϕ .

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow E\{\phi(Y - E(Y))\} \leqslant E\{\phi(X - E(X))\},$$

به این شرط که امیدهای ریاضی موجود باشند. در حالت خاص از $X \underset{disp}{\leqslant} Y$ نتیجه می‌شود:

$$E|Y - E(Y)| \leqslant E|X - E(X)| \quad \text{و} \quad Var(Y) \leqslant Var(X).$$

برای جزئیات بیش‌تر درباره‌ی ترتیب‌های تصادفی یاد شده در بالا به فصل دوم بخش 2.B از شیکد و شانتیکومار (۱۹۹۴) رجوع شود.

با توجه به رابطه‌ی (۵)، رابطه‌ای اساسی و بنیادی میان ترتیب نز خطر و ترتیب پراکنده‌ی وجود دارد، به طور واضح‌تر در نتیجه‌ی زیر که در باگای و کوچار (۱۹۸۶) آورده شده است این رابطه ارائه می‌شود.

قضیه‌ی ۱ با این فرض که X و Y دو متغیر تصادفی نامتفاوت باشند:

(آ) اگر $Y \underset{disp}{\leqslant} X$ یا G , نز خطر نزولی (*DFR*) باشد، آن‌گاه

(ب) اگر $Y \underset{hr}{\leqslant} X$ یا G نز خطر صعودی (*IFR*) باشد، آن‌گاه

گاهی به‌آسانی نمی‌توان ترتیب نز خطر یا ترتیب پراکنده‌ی بین دو متغیر تصادفی را به طور مستقیم از تعریف‌هایشان برقرار کرد، در چنین موقعی نتایج بالا می‌توانند برای اثبات برقراری ترتیب‌های بالا بین متغیرهای تصادفی بسیار سودمند باشند. در زیر مثال جالبی ارائه می‌شود.

مثال. فرض کنید X_{γ} متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکل صحیح γ باشد. برای $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant 1$ نشان می‌دهیم که

$$X_{\gamma_1} \underset{disp}{\leqslant} X_{\gamma_2} \quad \text{و} \quad X_{\gamma_1} \underset{hr}{\leqslant} X_{\gamma_2}.$$

می‌توان X_{γ_2} را به صورت $X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2 - \gamma_1}$ نشان داد به‌طوری که $X_{\gamma_2 - \gamma_1}$ متغیر تصادفی گاما می‌باشد که عددی صحیح است. علاوه بر این X_{γ_1} , مجموع γ_1 تا متغیر تصادفی نمایی مستقل است که دارای توابع چگالی احتمال لگ کاو است. با توجه به خاصیت ۴:

$$(6) \quad X_{\gamma_1} \underset{disp}{\leqslant} X_{\gamma_2}.$$

چون X_{γ_1} به‌ازای $\gamma_1 \geqslant 1$ IFR است با توجه به قسمت ب) از قضیه‌ی ۱ و رابطه‌ی (6) داریم

$$X_{\gamma_1} \leqslant X_{\gamma_2}$$

ساندرز و موران (۱۹۷۸) و شیکد (۱۹۸۲) نتایج بالا را برای متغیرهای تصادفی گاما با هر پارامتر شکل دلخواهی به‌کمک روش‌های تحلیلی پیچیده‌ای ثابت کردند. تکنیک زیر از ساندرز و موران (۱۹۷۸) برای برقرار ساختن ترتیب پراکنده‌ی میان اعضای یک خانواده‌ی پارامتری از توزیع‌های احتمال بسیار سودمند است.

- قضیه‌ی ۲** فرض کنید X_a متغیری تصادفی با تابع توزیع F_a برای هر $a \in \mathbb{R}$ باشد به طوری که آن را روی بازه‌ی $(-\infty, \infty)$ معتبر بوده و f_a تابع چگالی احتمال آن روی هیچ‌یک از زیربازه‌های $(x_-^{(a)}, x_+^{(a)})$ صفر نباشد؛
- (ب) با در نظر گرفتن F'_a به عنوان مشتق F_a نسبت به a به شرط موجود بودن آن برای هر $a > a^*$ و $a, a^* \in \mathbb{R}$

$$(7) \quad X_a \underset{\text{disp}}{\geqslant} X_{a^*}, \quad \text{اگر و فقط اگر،}$$

(8) $\frac{F'_a(x)}{f_a(x)}$ نسبت به x نزولی باشد.

احمد و همکاران (۱۹۸۶) رابطه‌های زیر را زبرگمعی (super-additive) و ترتیب پراکندگی برای متغیرهای تصادفی نامنفی برقرار ساختند. G نسبت به F زبرگمعی نامیده می‌شود ($Y \leq_{su} X$) اگر برای هر x و y از دامنه‌ی G

$$F^{-1}G(x+y) \geq F^{-1}G(x) + F^{-1}G(y).$$

قضیه‌ی ۳ اگر $.Y \leq_{disp} X$, $Y \leq_{st} X$ و $Y \leq_{su} X$ آنگاه

قضیه‌ی ۴ اگر $.Y \leq_{disp} X$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F^{-1}G(x)}{x} \geq 1$ و $Y \leq_{su} X$

پیش از این نیز رابطه‌های مشابهی میان ترتیب پراکندگی و دیگر ترتیب‌های جزئی عمر کردن، از قبیل ترتیب محدب (convex-ordering) و ترتیب ستاره (star-ordering) توسط دشپانده و کوچار (۱۹۸۳) ساله (۱۹۸۴) و بارتزویج (۱۹۸۵a و ۱۹۸۵b) به دست آمده بود. یکی از نتایج $Y \leq_{disp} X$ این است که به طور تصادفی از $|X_2 - X_1|$ کوچک‌تر است که نتیجه می‌دهد:

$$E(|Y_1 - Y_2|) \leq E(|X_1 - X_2|) \quad \text{و} \quad \text{Var}(Y) \leq \text{Var}(X),$$

به طوری که X_1 و X_2 (Y_1 و Y_2) دو نمونه‌ی مستقل از X (Y) می‌باشند. بارتزویج (۱۹۸۶) این نتیجه را به فاصله‌های (spacings) یک نمونه‌ی تصادفی n تابی گسترش داد، چنانکه در زیر آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۵ فرض کنید $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ آماره‌های مرتب یک نمونه‌ی تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع F باشند. همچنین $Y_{1:n}, \dots, Y_{n:n}$ نیز آماره‌های مرتب از نمونه‌ی تصادفی Y_1, \dots, Y_n از

توزیع G باشد، فاصله‌های متناظر را با $V_{i:n} \equiv Y_{i:n} - Y_{i-1:n}$ و $U_{i:n} \equiv X_{i:n} - X_{i-1:n}$ برای $i = 1, \dots, n$ نمایش می‌دهیم به طوری که $.X_{\cdot:n} = Y_{\cdot:n} \equiv \circ$. بنابراین:

$$Y_{disp} \leq^st X \Rightarrow (V_{\cdot:n}, \dots, V_{n:n}) \preceq^st (U_{\cdot:n}, \dots, U_{n:n}),$$

اما نتیجه‌ی ۵ گرفته می‌شود در زیر می‌آید.

نتیجه‌ی ۱ تحت شرایط قضیه‌ی ۵:

برای $Y_{j:n} - Y_{i:n} \leq^st X_{j:n} - X_{i:n}$ ، $1 \leq i < j \leq n$ آ)

$$Y_{n:n} - Y_{1:n} \leq^st X_{n:n} - X_{1:n}$$

که $s_Y \leq^st s_X$ و واریانس‌های نمونه‌ای هستند؛ ب)

$$\eta_Y \leq^st \eta_X$$

که $\eta_Y \leq^st \eta_X$ ج)

$$\eta_X = \left[\binom{n}{2} \right]^{-1} \sum_{i < j} |X_{j:n} - X_{i:n}|,$$

میانگین جینی برای نمونه‌ی X است و η_Y نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

برهان.

آ) با یافتن مجموع مؤلفه‌های متناظر بردارهای تصادفی $(U_{\cdot:n}, \dots, U_{n:n})$ و

از $i + 1$ تا j با استفاده از قضیه‌ی ۵ اثبات کامل است.

ب) با نمایش واریانس نمونه‌ای به صورت

$$\begin{aligned} s_X^2 &= \{n(n-1)\}^{-1} \sum_{i < j} (X_{j:n} - X_{i:n})^2 \\ &= \{n(n-1)\}^{-1} \sum_{i < j} (U_{j:n} + U_{j-1:n} + \dots + U_{i+1:n})^2, \end{aligned}$$

که به روشی تابعی صعودی از $(U_{\cdot:n}, \dots, U_{n:n})$ است و چون توابع صعودی از بردارهای تصادفی مرتب شده بر مبنای ترتیب تصادفی معمولی، خود بر مبنای همین ترتیب مرتبند، اثبات با توجه به قضیه‌ی ۵ کامل می‌شود.

ج) با توجه به اثبات قضیه‌ی قبل و ب) از نتیجه‌ی ۱، میانگین جینی را می‌توان به صورت تابعی صعودی از بردار فاصله‌ها نوشت.

در بخش ۲، نتایجی از ترتیب پراکندگی را میان آماره‌های مرتب متوالی که از یک توزیع DFR باشند، بیان می‌کنیم. به دلیل اهمیت ویژه‌ی سیستم‌های موازی در نظریه‌ی قابلیت اعتماد، در بخش ۳ صرفاً به مطالعه‌ی آن‌ها با مؤلفه‌های نمایی مستقل و غیرهم‌توزیع می‌پردازیم. همچنین به این می‌پردازیم که چگونه تغییر پارامترهای توزیع‌ها، روی طول عمر سیستم‌های موازی از دیدگاه‌های ترتیب پراکندگی و نزخ خطر تأثیر می‌گذارند و در ادامه نتایج را به مدل‌های نزخ خطر متناسب (PHR) (تممیم می‌دهیم. در بخش ۴ نیز به مطالعه‌ی ترتیب پراکندگی میان فاصله‌های نرمال شده از برخی خانواده‌ی توزیع‌ها می‌پردازیم.

۲ ترتیب پراکندگی میان آماره‌های مرتب

آماره‌های مرتب به‌طور کلی در آمار و به‌طور خاص در قابلیت اعتماد نقش مهمی بازی می‌کنند. زمان شکست یک سیستم k -out-of- n مطابق با $(n - k + 1)$ امین آماره‌ی مرتب است. در حالت خاص، رخ دادن طول عمر یک سیستم موازی، مشابه بزرگ‌ترین آماره‌ی مرتب و رخ دادن طول عمر یک سیستم سری، مشابه کوچک‌ترین آماره‌ی مرتب است. سیستم‌های موازی و سری ساده‌ترین مثال‌ها از سیستم‌های منسجم (coherent) هستند که بدنه‌ی آن‌ها بیشتر سیستم‌های موازی پیچیده‌اند. برای حالتی که مؤلفه‌های چنین سیستم‌هایی دارای توزیع‌های احتمال مستقل و مشابه باشند مطالب بسیاری تحت بررسی قرار گرفته است. اما در زندگی واقعی، سیستم‌ها معمولاً از مؤلفه‌هایی تشکیل می‌شوند که طول عمرشان به‌طور مشابه توزیع نشده‌اند و بیش‌تر آن‌ها وابسته‌اند، مانند مؤلفه‌هایی که در یک محیط مشترک کار می‌کنند. چون نظریه‌ی توزیع چنین سیستم‌هایی کاملاً پیچیده است، نتایج کمی در دسترس است. در این بخش نتایجی از ترتیب پراکندگی میان آماره‌های مرتب که از توزیع‌هایی با نزخ خطر نزولی هستند، ارائه می‌شود.

برای هر i, n ، $X_{i:n}, i = 1, \dots, n$ را به عنوان i امین آماره‌ی مرتب از یک مجموعه‌ی n تابی متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n در نظر می‌گیریم. احتیاجی نیست که X_i ‌ها مستقل یا هم‌توزیع باشند. در حالتی که X_1, \dots, X_n یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR باشند، دیوید و گرونولد (۱۹۸۲) ثابت کردند که برای $n \leq i < j \leq n$ $\text{var}(X_{i:n}) \leq \text{var}(X_{j:n})$. کوچار (۱۹۹۶a) این نتیجه را به مقایسه آماره‌های مرتب نمونه‌های تصادفی با اندازه‌ی نمونه‌های نابرابر از توزیع‌های DFR تعیین دادند.

قضیه‌ی ۶ فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR باشد، بنا بر این برای $j \leq i$

و $n - i \geq m - j$ خواهیم داشت:

$$(9) \quad X_{i:n} \underset{disp}{\leq} X_{j:m}.$$

برای اثبات این قضیه ابتدا به حالتی که توزیع مورد نظر نمایی باشد می‌پردازیم. بولاند و همکاران (۱۹۹۸) همین قضیه را در حالتی که اندازه نمونه‌ها برابر باشند ثابت کرده‌اند.

лем ۱ فرض کنید $X_{i:n}$ نامین آماره‌ی مرتب از یک نمونه‌ی n تایی از توزیع نمایی با پارامتر λ باشد. در این صورت برای $j \leq i \leq n - i \geq m - j$

$$(10) \quad X_{i:n} \underset{disp}{\leq} X_{j:m}.$$

برهان. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_m دو نمونه‌ی تصادفی n تایی و m تایی مستقل نمایی با نزخ خطر λ باشند. نامین آماره‌ی مرتب $X_{i:n}$ را می‌توان به صورت مجموعی از تفاصل‌های مکرر نوشت:

$$(11) \quad X_{i:n} = (X_{i:n} - X_{i-1:n}) + \dots + (X_{1:n} - X_{0:n}) + X_{0:n} \\ \stackrel{st}{=} \sum_{k=1}^i E_{n-i+k},$$

به طوری که برای هر $k, i, k = 1, \dots, i$ یک متغیر تصادفی نمایی با نزخ خطر λ است و همچنین به روشنی E_{n-i+k} از یکدیگر مستقل‌اند. به طور مشابهی برای $X'_{j:m}$ نیز داریم:

$$(12) \quad X'_{j:m} \stackrel{st}{=} \sum_{k=1}^j E'_{m-j+k}.$$

به طور مشابه برای هر $k, j, k = 1, \dots, j$ یک متغیر تصادفی نمایی با نزخ خطر λ است و همچنین به روشنی E'_{m-j+k} از یکدیگر مستقل‌اند. رابطه‌ی برای $E_{n-i+1} \underset{disp}{\leq} E'_{m-j+1}$ برای هر $j \geq m - i$ با استفاده از تعریف ترتیب پراکندگی برقرار است. از آنجا که رده‌ی توزیع‌هایی که دارای توابع چگالی احتمال با خاصیت لگ‌کاوی می‌باشند، دارای پیچش‌هایی هستند که دارای توابع چگالی احتمال لگ‌کاو می‌باشند (مراجعه نمایید به دارمادهیاکری و جاگ دف (۱۹۸۸)، ص ۱۷)، با به کارگیری مکرر خاصیت ۴ داریم:

$$(13) \quad \sum_{k=1}^i E_{n-i+k} \underset{disp}{\leq} \sum_{k=1}^i E'_{m-j+k}.$$

همچنین از آن جا که $\sum_{k=i+1}^j E'_{m-j+k}$ مجموع متغیرهای تصادفی نمایی مستقل دارای تابع چگالی احتمال با خاصیت لگ کاو و نیز از $\sum_{k=1}^i E'_{m-j+k}$ مستقل است، با پیروی از خاصیت Ψ ، برای هر $j \leq i$ طرف راست (۱۳) از $\sum_{k=1}^j E'_{m-j+k}$ کم پراکنده‌تر است. بنا بر این،

$$X_{i:n} \stackrel{disp}{=} \sum_{k=1}^i E_{n-i+k} \stackrel{disp}{\leq} \sum_{k=1}^j E'_{m-j+k} \stackrel{disp}{=} X'_{j:m}.$$

چون $X'_{j:m}$ دارای یک توزیع اند، (۱۰) ثابت می‌شود.

برهان لم زیر در بار توپوچ (۱۹۸۷) داده شده است.

لم ۲ فرض کنید $R^+ \rightarrow R^+$: ϕ تابعی باشد به طوری که $\phi(\phi(x)) = x$ صعده باشد. در این صورت، برای هر تابع محدب و اکیداً صعده $\psi \phi \psi^{-1}(x) = x$ تابع ψ صعده است.

اکنون برهانی برای قضیه‌ی ۶ ارائه می‌دهیم.

برهان. تابع توزیع $X_{j:m}$ عبارت است از $F_{j:m}(x) = B_{j:m}F(x)$ به طوری که $B_{j:m}$ دارای توزیع بتأبا پارامترهای $(j, m-j+1)$ است. فرض کنید G تابع توزیع متغیر تصادفی نمایی با میانگین یک باشد. پس $H_{j:m}(x) = B_{j:m}G(x)$ تابع توزیع j زامین آماره‌ی مرتب نمونه تصادفی به اندازه‌ی n از توزیع میانگین یکتای نمایی خواهد بود. همچنین می‌توانیم شان دهیم که

$$\begin{aligned} F_{j:m}(x) &= B_{j:m}GG^{-1}F(x) \\ (14) \quad &= H_{j:m}G^{-1}F(x). \end{aligned}$$

برای اثبات، نشان می‌دهیم که برای $j \leq i \leq n$ $i - j \geq m - i$ و $i - j \leq m - i$.

$$\begin{aligned} F^{-1}GH_{j:m}^{-1}H_{i:n}G^{-1}F(x) - x &\stackrel{F_{j:m}^{-1}}{\sim} F_{i:n}(x) - x \\ (15) \quad &\text{نسبت به } x \text{ صعده باشد.} \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱، برای $j \leq i \leq n$ $i - j \geq m - i$ و $i - j \leq m - i$ نیز نسبت به x صعده است.

همچنین تابع $\psi(x) = F^{-1}G(x)$ اکیداً صعده و محدب است اگر F DFR باشد. اکنون

نتیجه‌ی لازم از لم ۲ به دست می‌آید.

نکته. از قضیه‌ی ۶ نتیجه می‌شود که برای یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR بازای هر $i = 1, \dots, n$ ،

$$X_{i:n+1} \underset{disp}{\leqslant} X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{i+1:n+1}.$$

برای برقراری نتیجه‌ی بالا فرض DFR، بسیار مهم است. برای مثال می‌توان نشان داد که در حالت یک نمونه‌ی تصادفی دوتایی از توزیع یکنواخت (۱،۰) که DFR نیست، واریانس $X_{1:2}$ از واریانس $X_{2:2}$ کوچک‌تر نیست.

حال به مسئله‌ی مقایسه‌ی آماره‌های مرتب وقتی که مشاهدات مستقل و غیرهم‌توزیع باشند، می‌پردازیم. بولاند، النویهی و پروشن (۱۹۹۴) نشان دادند که اگر X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند، برای $n \leq i < j \leq n$ ، داریم $X_{i:n} \underset{hr}{\leqslant} X_{j:n}$. با استفاده از این و قضیه‌ی ۱ به قضیه‌ی زیر می‌رسیم. قضیه‌ی ۷ اگر X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی نامفی مستقل باشند آن‌گاه برای $1 \leq i < j \leq n$ داریم $X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{j:n}$ باشد.

حتا اگر نمونه‌ی ما از توزیع DFR باشد، ممکن است $X_{i:n}$ برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ باشد. اما کوچک‌ترین آماره‌ی مرتب تحت این حالت همواره DFR است. این ادعا نتیجه‌ی این حقیقت است که نز خطر مؤلفه‌های مستقل یک سیستم سری مجموع نز خطر مؤلفه‌های است. بنا بر این، اگر هر مؤلفه سیستم سری نز خطر نزولی داشته باشد، سیستم دارای خاصیت DFR است. از این مشاهده نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه‌ی ۲ فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل DFR باشند. در این صورت برای هر $j, 1 \leq j \leq n$ داریم،

$$X_{1:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{j:n}.$$

از این نتیجه در می‌یابیم که در میان همه‌ی سیستم‌های k -out-of- n ساخته شده از مؤلفه‌ی مستقل DFR، سیستم سری کم پراکنده‌ترین است ولی بیشترین نز خطر را دارد. ترتیب پراکنندگی میان سیستم‌های سری از مؤلفه‌های DFR مستقل، وقتی تعداد مؤلفه‌ها مختلف هستند در قضیه‌ی زیر بیان شده است.

قضیه‌ی ۸ فرض کنید X_1, \dots, X_{n+1} متغیرهای مستقل DFR باشند. در این صورت،

$$X_{1:n+1} \underset{disp}{\leqslant} X_{1:n}.$$

برهان. چون نز خطر $X_{1:n}$ کمتر از $X_{1:n+1}$ است و $X_{1:n}$ تحت شرایط مفروض دارای توزیع DFR است از قضیه‌ی ۱ حکم قضیه، نتیجه می‌شود.
در قضیه‌ی بعد ترتیب پراکندگی را میان آماره‌های مرتب وقتی که نمونه‌های تصادفی از توزیع‌های مختلف گرفته شده باشند، توسعه می‌دهیم.

قضیه‌ی ۹ فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع پیوسته‌ی F باشد و Y_1, \dots, Y_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع پیوسته‌ی G باشد. اگر یکی از F یا G باشند، آن‌گاه برای $j \leq i$ و $n - i \geq m - j$

$$(16) \quad X \underset{\text{disp}}{\leqslant} Y \Rightarrow X_{i:n} \underset{\text{disp}}{\leqslant} Y_{j:m}.$$

برهان. فرض کنید F DFR باشد (اثبات در حالتی که G DFR باشد مشابه است). با استفاده از قضیه‌ی ۶ برای $j \leq i \leq n - i \geq m - j$ داریم $X_{i:n} \underset{\text{disp}}{\leqslant} Y_{j:m}$. با توزیع (1986) ثابت کرد که اگر $X_{j:m} \underset{\text{disp}}{\leqslant} Y_{j:m}$ آن‌گاه $X \underset{\text{disp}}{\leqslant} Y$ موردنظر ثابت می‌شود.

چون فرض به همراه شرط DFR بودن F یا G ، رابطه‌ی $X \underset{\text{hr}}{\leqslant} Y$ را نتیجه می‌دهد، از قضیه‌ی بالا نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید.

نتیجه‌ی ۳ فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ی تصادفی n تایی از توزیع پیوسته‌ی F و همچنین Y_1, \dots, Y_m نمونه‌ی تصادفی m تایی از توزیع پیوسته‌ی G باشد. اگر یکی از توزیع‌های F یا G باشند، آن‌گاه برای $j \leq i \leq n - i \geq m - j$

$$X \underset{\text{hr}}{\leqslant} Y \Rightarrow X_{i:n} \underset{\text{disp}}{\leqslant} Y_{j:m}.$$

کوچار $(1996b)$ نتیجه‌ای مشابه برای زمان‌های رخداد یک فرایند پواسون ناهمگن (یا به طور معادل برای مقادیر رکورد) با تابع چگالی احتمال نزولی به دست آورد. یکی از نتایج در زیر ارائه شده است.

قضیه‌ی ۱۰ فرض کنید $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون ناهمگن با تابع نز نزولی باشد و همچنین فرض کنید R_1, R_2, \dots زمان‌های رخداد بیانی باشند. در این صورت،

$$R_n \underset{\text{disp}}{\leqslant} R_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

۳ ترتیب تصادفی سیستم‌های موازی با مؤلفه‌های ناهمگن

توزیع نمایی نقش بسیار مهمی را در آمار بازی می‌کند. این توزیع به دلیل داشتن خاصیت بی‌حافظگی (non-aging) خواص جالبی دارد و اغلب کران‌های بسیار آسانی را برای احتمال‌های بقا و دیگر مشخصات مورد توجه سیستم‌های با مؤلفه‌های غیرنمایی به وجود می‌آورد. پلذگر و پروshan (۱۹۷۱) مسئله‌ی مقایسه‌ی تصادفی آماره‌های مرتب از متغیرهای تصادفی نمایی مستقل غیر هم‌توزیع را آماره‌های متناظر با متغیرهای نمایی مستقل و هم‌توزیع مورد مطالعه قرار دادند. این موضوع توسط پژوهشگران بسیاری از جمله پروshan و ستورامان (۱۹۷۶)، بولاند، النویهی و پروshan (۱۹۹۴)، دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷)، بولاند، شیدک و شانتیکومار (۱۹۹۸)، بن و پالتانه (۱۹۹۹) و خالدی و کوچار (۲۰۰۰a و b) در میان دیگران مورد توجه و پیگیری قرار گرفت. در این بخش سیستم‌های موازی را که از مؤلفه‌های غیر هم‌توزیع تشکیل شده‌اند از دیدگاه ترتیب پراکندگی و ترتیب نزخ خطر مورد مقایسه قرار می‌دهیم. ابتدا به حالتی که مؤلفه‌ها دارای توزیع‌های نمایی هستند می‌پردازیم و سپس نتایج را برای خانواده‌ی نزخ خطر متناسب گسترش می‌دهیم. پلذگر و ستورامان (۱۹۷۱) نتیجه‌ی زیر را ثابت کردند.

قضیه‌ی ۱۱ فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نزخ خطر λ_i برای هر $i = 1, \dots, n$ است. فرض کنید X_1^*, \dots, X_n^* مجموعه‌ی دیگری از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشد که X_i^* دارای نزخ خطر λ_i^* برای هر $i = 1, \dots, n$ است. آن‌گاه $\lambda^* \geq \lambda_i^*$ برای هر $i = 1, \dots, n$ نتیجه می‌دهد که

$$(17) \quad X_{1:n} \stackrel{st}{=} X_{1:n}^* \quad \text{و} \quad X_{i:n} \stackrel{st}{\geq} X_{i:n}^*.$$

پروshan و ستورامان (۱۹۷۶) این نتیجه را به ترتیب تصادفی چندمتغیره میان دو بردار از آماره‌های مرتب تعیین دادند. آنان تحت شرایط قضیه‌ی بالا ثابت کردند که

$$(X_{1:n}, \dots, X_{n:n}) \stackrel{st}{\succ} (X_{1:n}^*, \dots, X_{n:n}^*).$$

برای حالت خاص $n = 2$ و $i = 1, 2$ ، بولاند، النویهی و پروshan (۱۹۹۴) به طور جزئی نتیجه‌ی بالا از پلذگر و پروshan (۱۹۷۱) را از ترتیب تصادفی به ترتیب نزخ خطر تعیین دادند. نتیجه‌ی آن‌ها در زیر آمده است.

قضیه‌ی ۱۲ فرض کنید $r_{\lambda_1, \lambda_2}(t)$ نزخ خطر یک سیستم موازی از دو مؤلفه باشد که طول عمر آن‌ها متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نزخ‌های خطر λ_1 و λ_2 هستند. در این صورت $r_{\lambda_1, \lambda_2}(t)$ یکتابع

مقعر شور در (λ_1, λ_2) است. بنا بر این $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ نتیجه می‌دهد:

$$X_{2:2} \geqslant X_{2:2}^{*}_{hr}.$$

بولاند، التوبیهی و پروشان (۱۹۹۴) با یک مثال نقض نشان دادند که قضیه‌ی ۱۱ را نمی‌توان به n دلخواه تعمیم داد. دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) ثابت کردند که نز خطر وارون $X_{n:n}$ ، طول عمر سیستم موازی از n مؤلفه‌ی نمایی مستقل، در λ محدب شور است.

مسئله‌ی طبیعی دیگر مقایسه‌ی $X_{n:n}$ با $Y_{n:n}$ است که Y_1, \dots, Y_n نمونه‌ی تصادفی از توزیع نمایی با نز خطر $\frac{\lambda_i}{n}$ می‌باشد. دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) نتیجه‌ی زیر را ثابت کردند.

قضیه‌ی ۱۳ فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نز خطر λ_i برای $i = 1, \dots, n$ و Y_1, \dots, Y_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نز خطر $\bar{\lambda}$ است. در این صورت،

$$(18) \quad Y_{n:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{n:n} \quad \text{و} \quad Y_{n:n} \underset{hr}{\leqslant} X_{n:n}.$$

این نتایج کران پایینی برای واریانس $X_{n:n}$ و کران بالایی برای نز خطر $X_{n:n}$ ارائه می‌دهند. جالب است که بدانیم آیا نتیجه‌ی بالا قابل تعمیم به آماره‌های مرتب دیگر می‌باشد؟ گرچه در حالت کلی پاسخ را نمی‌دانیم اما در قضیه‌ی بعدی می‌بینیم که نتیجه‌ی برای دومین آماره مرتب برقرار است.

قضیه‌ی ۱۴ فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نز خطر λ_i برای $i = 1, \dots, n$ است و همچنین فرض کنید Y_1, \dots, Y_n نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نز خطر $\bar{\lambda}$ باشد. در این صورت

$$Y_{1:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{1:n}.$$

برهان. از قضیه‌ی ۳.۷ در کوچار و کروار (۱۹۹۶) نتیجه می‌شود که

$$(19) \quad Y_{1:n} - Y_{1:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{1:n} - X_{1:n} \quad \text{و} \quad X_{1:n} \stackrel{st}{=} Y_{1:n}.$$

چون توزیع $(Y_{1:n})X_{1:n}$ لگ کاو است، با پیروی از خاصیت ۴،

$$(20) \quad Y_{1:n} = (Y_{1:n} - Y_{1:n}) + Y_{1:n} \underset{disp}{\leqslant} (X_{1:n} - X_{1:n}) + X_{1:n} = X_{1:n}.$$

چون $X_{1:n} - X_{2:n}$ مستقل از $Y_{1:n} - Y_{2:n}$ است، بنا بر این،

$$Y_{2:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{2:n}.$$

در قضیه‌ی زیر خالدی و کوچار (b) ۲۰۰۰ با جایگذاری $\bar{\lambda}$ به جای λ ، نشان دادند که نتایج قضیه‌ی ۱۳ همچنان برقرار است.

قضیه‌ی ۱۵ فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نز خطر λ_i برای $i = 1, \dots, n$ است. همچنین فرض کنید Z_1, \dots, Z_n نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نز خطر $\tilde{\lambda}$ باشد. در این صورت

$$Z_{n:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{n:n} \quad \text{و} \quad Z_{n:n} \underset{hr}{\leqslant} X_{n:n}.$$

نتیجه‌ی ۴ تحت شرایط قضیه‌ی ۱۵،

(آ) برای $r_{X_{n:n}}$ نز خطر داریم:

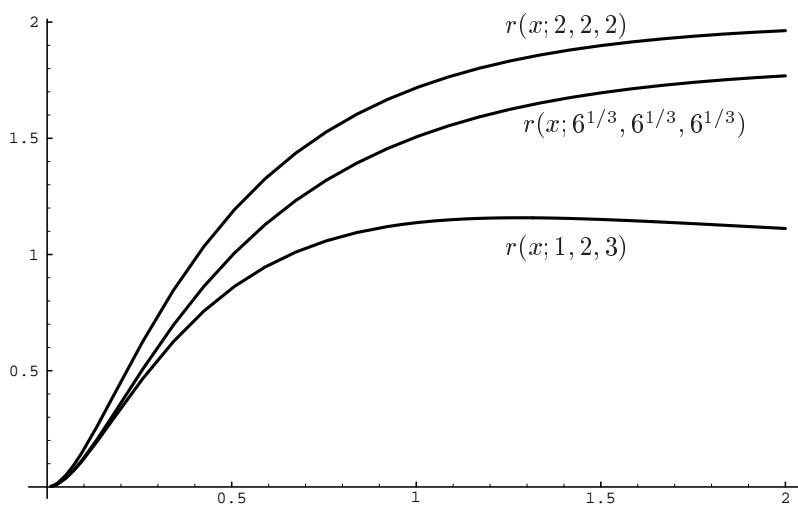
$$r_{X_{n:n}}(x; \lambda) \leq \frac{n\tilde{\lambda} \left(1 - \exp\{-\tilde{\lambda}x\}\right)^{n-1} \exp(-\tilde{\lambda}x)}{1 - (1 - \exp\{-\tilde{\lambda}x\})^n},$$

(ب)

$$\text{var}(X_{n:n}; \lambda) \geq \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i+1)^2}.$$

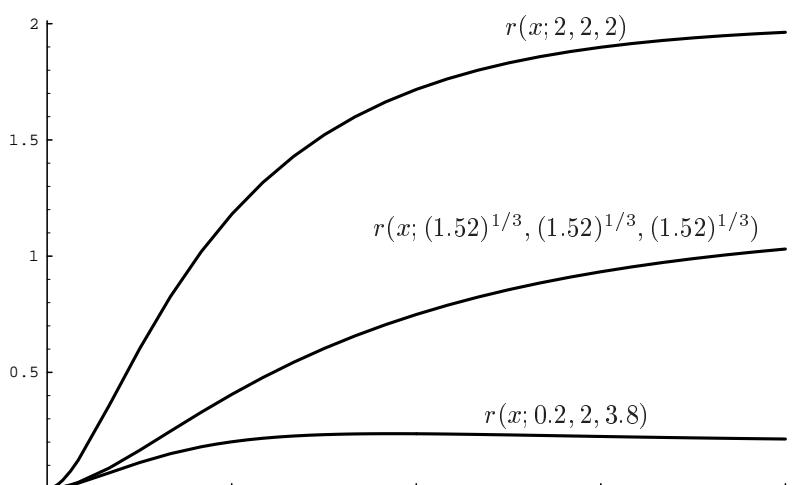
چون نز خطر $Y_{n:n}$ تابعی غیر نزولی از $\tilde{\lambda}$ است و این که میانگین هندسی λ_i ‌ها از میانگین حسابی آنها کوچک‌تر است، کران‌های جدید حاصل از نتیجه‌ی ۴ بهتر از آن‌هایی است که توسط دکستر، کوچار و روهو (۱۹۹۷) بدست آمدند.

در شکل‌های ۱ و ۲، نزهای خطر سیستم‌های موازی سه مؤلفه‌ای نمایی را به همراه کران‌های بالای داده شده توسط دکستر، کوچار و روهو (۱۹۹۷) و همچنین توسط نتیجه‌ی ۴ رسم کردند. بردار پارامترها در شکل ۱، $(1, 2, 3) = \lambda_1$ و در شکل ۲، $(0.2, 0.3, 0.8) = \lambda_2$ است. همچنین توجه کنید که $\lambda_2 \succ^m \lambda_1$.



شکل ۱. نمودار نزخ خطر

از شکل‌ها واضح است که با پراکنده‌تر شدن λ ‌ها از نظر بیشاندن، کران‌ها نسبتاً بهتر می‌شوند. این پدیده به دلیل مقعر شور بودن میانگین هندسی است، و از طرفی میانگین حسابی ثابت شور (Schur-constant) است و نزخ خطر یک سیستم موازی متšکل از مؤلفه‌های نمایی مستقل و هم توزیع با نزخ خطر مشترک $\tilde{\lambda}$ در $\tilde{\lambda}$ صعودی است.



شکل ۲. نمودار نزخ خطر

۳.۱ مدل نرخ خطر متناسب (PHR)

فرض کنید \bar{F} تابع بقای یک متغیر تصادفی نامنفی X با نرخ خطر $h(\cdot)$ باشد. متغیرهای تصادفی مستقل X_1, X_2, \dots, X_n از مدل نرخ خطر متناسب پیروی می‌کنند اگر X_i برای $i = 1, \dots, n$, دارای نرخ خطر $\lambda_i h(\cdot)$ باشد. نتیجه‌ی قضیه‌ی ۱۵ قابل تعمیم به مدل PHR است که در زیر آورده شده است.

قضیه‌ی ۱۶ فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند که X_i دارای نرخ خطر $\lambda_i h(\cdot)$ برای $i = 1, \dots, n$ است، به طوری که $h(\cdot)$ نرخ خطر متغیر تصادفی نامنفی باشد. همچنین فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_n یک نمونه‌ی تصادفی از یک توزیع با نرخ خطر مشترک $\tilde{\lambda} h(\cdot)$ باشد، به طوری که $\tilde{\lambda} = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}}$. در این صورت

$$\begin{aligned} & X_{n:n} \geq_{hr} Y_{n:n} \quad (\text{ا}) \\ \text{اگر } & X_{n:n} \geq_{disp} Y_{n:n} \quad DFR, F \end{aligned}$$

برهان.

(آ) فرض کنید $H(x) = -\log \bar{F}(x)$ نشان‌دهنده‌ی نرخ خطر تجمعی F باشد و برای هر i , $Z_i = H(Y_i)$ و $W_i = H(X_i)$, $i = 1, \dots, n$ از مدل PHR پیروی می‌کنند، به روشی Z_i ‌ها نمایی با نرخ خطر λ_i و W_i ‌ها نیز نمایی با نرخ خطر $\tilde{\lambda}$ برای هر i هستند. از قضیه‌ی ۱۵ داریم که $Z_{n:n} \geq_{hr} W_{n:n}$. با توجه به اینکه H^{-1} معکوس راست H , غیر نزولی است، در این صورت $Z_{n:n} \geq_{hr} W_{n:n}$ و $H^{-1}(Z_{n:n}) \geq_{hr} H^{-1}(W_{n:n})$ و قسمت آ) ثابت می‌شود.

(ب) از قضیه‌ی ۱۵ به دست می‌آید که $Z_{n:n} \geq_{st} W_{n:n}$ و همچنین $Z_{n:n} \geq_{disp} W_{n:n}$. تابع $H^{-1}(x)$ غیر نزولی و محدب است، چون F غیر نزولی و DFR است. با استفاده از این‌ها، از خاصیت ۶ نتیجه می‌شود که $H^{-1}(Z_{n:n}) \geq_{disp} H^{-1}(W_{n:n})$ که معادل با $X_{n:n} \geq_{disp} Y_{n:n}$ است.

۴ ترتیب پراکندگی میان فاصله‌ها

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ی تصادفی از توزیع پیوسته با تابع توزیع احتمال F باشد و فرض کنید برای هر $i, i = 1, \dots, n$, $D_{i:n} = (n - i + 1)(X_{i:n} - X_{i-1:n})$ این فاصله‌ی نرمال شده باشد که در آن $\equiv X_{\cdot:n}$. متغیرهای تصادفی $D_{1:n}, D_{2:n}, \dots, D_{n:n}$ مستقل و هم‌توزیع‌اند اگر و فقط اگر F نمایی باشد. بارلو و پروشان (۱۹۶۶) ثابت کردند که اگر F DFR (IFR) باشد، آنگاه فاصله‌های نرمال شده به طور تصادفی صعودی (نزولی) هستند. کوچار و کرمانی (۱۹۹۵) این نتیجه را برای حالتی که F است به ترتیب نز خطر تعیین دادند. این نتیجه در زیر آمده است.

قضیه ۱۷ فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ی تصادفی از توزیعی DFR باشد. در این صورت،

$$(آ) \quad \text{برای } i = 1, \dots, n-1, \quad D_{i:n} \leq D_{i+1:n}.$$

$$(ب) \quad \text{برای } i \geq n, \quad D_{i:n+1} \leq D_{i:n}.$$

بارلو و پروشان (۱۹۶۶) نشان دادند که فاصله‌های متناظر با متغیرهای تصادفی DFR، مستقل و هم‌توزیع دارای توزیع DFR هستند. اثبات قضیه بعد متکی به رابطه‌ی میان ترتیب نز خطر و ترتیب پراکندگی و قضیه ۱۷ است.

قضیه ۱۸ فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ی تصادفی از توزیعی DFR باشد. در این صورت،

$$(آ) \quad \text{برای هر } i = 1, \dots, n-1, \quad D_{i:n} \leq D_{i+1:n}.$$

$$(ب) \quad \text{برای } i \geq n, \quad D_{i:n+1} \leq D_{i:n}.$$

کوچار (۱۹۹۶c) نتایج مشابهی برای فاصله‌های زمانی رخدادهای متوالی (inter-occurrence) یک فرایند پواسون ناهمگن به دست آورد. خالدی و کوچار (۱۹۹۹) نتیجه‌ی کلی زیر را که تعیینی از قضایای ۱۷ و ۱۸ از مقایسه‌های مسائل دونمونه‌ای است اثبات نمودند.

قضیه‌ی ۱۹ فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی نامنفی X با توزیع پیوسته F و $U_{i:n} = (n-i+1)(X_{i:n} - X_{i-1:n})$ امین فاصله‌ی نرمال متناظر با X_i ها باشد. همچنین فرض کنید Y_1, \dots, Y_m نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی نامنفی Y با توزیع پیوسته G و $V_{j:m} = (m-j+1)(Y_{j:n} - Y_{j-1:n})$ امین فاصله‌ی نرمال متناظر با Y_j ها باشد. در اینجا $n-i \geq m-j$ و $i \leq j$ باشد، آن‌گاه برای $j \leq i$ داریم $DFR(Y \leq X) \equiv DFR(X_{i:n} \leq Y_{j:m})$.

$$U_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} V_{j:m}.$$

کوچار و کروار (۱۹۹۶) مسئله‌ی مقایسه‌ی فاصله‌های متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای مختلف ممکن را مورد مطالعه قرار دادند.

قضیه‌ی ۲۰ فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند به طوری که برای هر $i, X_i, i = 1, \dots, n$ دارای توزیع نمایی با نرخ خطر λ_i و $D_{i:n} = \text{امین فاصله‌ی نرمال شده برای } X_i$ باشد. همچنین فرض کنید X_1^*, \dots, X_n^* نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n}$ باشد. آن‌گاه برای $i = 1, \dots, n$

$$\text{برای } i = 2, \dots, n \quad (i)$$

$$D_{i:n}^* \underset{disp}{\leqslant} D_{i:n},$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) \succcurlyeq (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \Rightarrow D_{2:2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \leq D_{2:2}(\lambda_1, \lambda_2). \quad (b)$$

کوچار و کروار (۱۹۹۶) حدس زدند که در حالت مستقل بودن متغیرهای نمایی با پارامترهای مختلف، برای $i = 1, \dots, n-1$ رابطه‌ی $D_{i:n} \leq D_{i+1:n}$ برقرار است. خالدی و کوچار (۲۰۰۱) آن را برای حالت خاصی که همه به جز یکی از پارامترها برابر باشند، ثابت کردند. بدین ترتیب آن‌ها در حالتی که $\lambda_n = \lambda^{*} = \dots = \lambda_1 = \lambda$ باشند، حدس آن‌ها را ثابت کردند. به این حالت مدل نمایی تک دور افتاده با پارامتر (λ, λ^*) می‌گوییم.

قضیه‌ی ۲۱ (خالدی و کوچار (۲۰۰۱)) فرض کنید X_1, \dots, X_n از مدل نمایی تک دور افتاده با پارامترهای (λ_1, λ_1^*) و Y_1, \dots, Y_n از مدل نمایی تک دور افتاده با پارامترهای (λ_2, λ_2^*) باشد. آن‌گاه برای $i = 1, \dots, n$

$$(21) \quad \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_2 < \lambda_1 \quad \text{و} \quad \lambda_1^* + (n-1)\lambda_1 = \lambda_2^* + (n-1)\lambda_2$$

$$\text{آن‌گاه برای } i = 1, \dots, n$$

$$D_{i:n}^{(1)} \underset{hr}{\geqslant} D_{i:n}^{(2)} \quad \text{و} \quad D_{i:n}^{(1)} \underset{disp}{\geqslant} D_{i:n}^{(2)},$$

به طوری که $D_{i:n}^{(1)}$ و $D_{i:n}^{(2)}$ ، به ترتیب فاصله‌های متناظر با مدل‌های نمایی تُک دور افتاده با پارامترهای (λ_1, λ_1^*) و (λ_2, λ_2^*) هستند.

نکته. توجه کنید که از (۲۱) نتیجه می‌شود که

$$(\lambda_1^*, \lambda_1, \dots, \lambda_1) \succ^m (\lambda_2^*, \lambda_2, \dots, \lambda_2).$$

قدردانی

نویسنده از داوران و سردبیر گرامی مجله برای توصیه‌های مفید آن‌ها تشکر می‌نماید. این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی داشگاه شهید بهشتی-۶۰، ۴۱۷ انجام شده است.

مرجع‌ها

- Ahmad, A.N.; Alizaid, A.; Bartoszewicz, J.; Kochar, S.C. (1986). Dispersive and superadditive ordering. *Adv. in Appl. Probab.* **18**, 1019-1022.
- Bagai, I.; Kochar, S.C. (1986). On tail ordering and comparison of failure rates. *Commun. Statist. Theory Methods* **15**, 1377-1388.
- Barlow, R.E.; Proschan, F. (1966). Inequalities for linear combinations of order statistics from restricted families. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1574-1592.
- Barlow, R.E.; Proschan, F. (1981). Statistical theory of reliability and life testing. To Begin With: Silver Spring, Maryland.
- Bartoszewicz, J. (1985a). Moment Inequalities for order statistics from ordered families of distributions. *Metrika* **32**, 383-389.
- Bartoszewicz, J. (1985b). Dispersive ordering and monotone failure rate distributions. *Adv. Appl. Probab.* **17**, 472-474.
- Bartoszewicz, J. (1986). Dispersive ordering and the total time on test transformation. *Statist. Probab. Lett.* **6**, 13-16.
- Bartoszewicz, J. (1987). A note on dispersive ordering defined by hazard functions. *Statist. Probab. Lett.* **6**, 13-17.
- Bickel, P.J.; Lehmann, E.L. (1979). Descriptive statistics for nonparametric models. IV. Spread. In Contributions to Statistics. Jaroslav Hajek Memorial Volume, edited by Jena Jureckova, 33-40.
- Boland, P.J.; El-Newehi, E.; Proschan, F. (1994). Schur properties of convolutions of expo-

nential and geometric random variables. *J. Multivariate Anal.* **48**, 157-167.

Boland, P.J.; Shaked, M.; Shanthikumar, J.G. (1998). Stochastic ordering of order statistics. In N. Balakrishnan and C.R. Rao, eds, *Handbook of statistics 16 - Order statistics: Applications*. Elsevier, New York, 89-103.

Bon, J.L.; Paltanea, E. (1999). Ordering properties of convolutions of exponential random variables. *Lifetime Data Anal.* **5**, 185-192.

David, H.A.; Groenveld, R.A. (1982). Measures of local variation in a distribution: Expected lengths of spacings and variances of order statistics. *Biometrika* **69**, 227-232.

Deshpande, J.V.; Kocher, S.C. (1982). Some competitors of the Wilcoxon-Mann-Whitney test for the location alternative. *J. Indian Statist. Assoc.* **20**, 9-18.

Deshpande, J.V.; Kocher, S.C. (1983). Dispersive ordering is the same as tail ordering. *Adv. in Appl. Probab.* **15**, 686-687.

Deshpande, J.V.; Mehta, G.P. (1982). Inequality for the infimum of PCS for heavy tailed distributions. *J. Indian Statist. Assoc.* **19**, 19-25.

Dharmadhikari, S.; Joeg-dev, K. (1988). Unimodality, Convexity and Applications. Academic press, INC. New York, London.

Doksum, J. (1969). Star-shaped transformations and the power of rank test. *Ann. Math. Statist.* **40**, 1167-1176.

Dykstra, R.; Kocher, S.C.; Rojo, J. (1997). Stochastic comparisons of parallel systems of heterogeneous exponential components. *J. Statist. Plann. Inference* **65**, 203-211.

Khaledi, B.; Kocher, S.C. (1999). Stochastic orderings between distributions and their sample spacings-II. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 161-166.

Khaledi, B.; Kocher, S.C. (2000a). On dispersive ordering between order statistics in one-sample and two-sample problems. *Statist. Probab. Lett.* **46**, 257-261.

Khaledi, B.; Kocher, S.C. (2000b). Some new results on stochastic comparisons of parallel systems. *J. Appl. Probab.* **37**, 1123-1128.

Khaledi, B.; Kocher, S.C. (2001). Stochastic properties of spacings in a single-outlier exponential model. *Probab. in Engrg. Inform. Sci.* **15**, 401-408.

Kocher, S.C. (1996a). Dispersive ordering of order statistics. *Statist. Probab. Lett.* **27**, 271-274.

Kocher, S.C. (1996b). A note of dispersive ordering of record values. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* **46**, 63-67.

Kocher, S.C. (1996c). Some results on interarrival times of nonhomogeneous Poisson pro-

- cesses. *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **10**, 75-85.
- Kochar, S.C. (1999). Stochastic orderings between distributions and their sample spacings. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 161-166.
- Kochar, S.C.; Kirmani, S.N.U.A. (1995). Some new results on normalized spacings from restricted families of distributions. *J. Statist. Plann. Inference* **46**, 47-57.
- Kochar, S.C.; Korwar, R. (1996). Stochastic orders for spacings of heterogeneous exponential random variables. *J. Multivariate Anal.* **57**, 69-83.
- Kochar, S.C.; Rojo, J. (1996). Some new results on stochastic comparisons of spacings from heterogeneous exponential distributions. *J. Multivariate Anal.* **59**, 272-281.
- Lehmann, E.L. (1955). Ordered families of distributions. *Ann. Math. Statist.* **26**, 399-419.
- Lehmann, E.L.; Rojo, J. (1992). Invariant directional orderings. *Ann. Statist.* **20**, 2100-2110.
- Lewis, T.; Thompson, J.W. (1981). Dispersive distribution and the connection between dispersivity and strong unimodality. *J. Appl. Probab.* **18**, 76-90.
- Marshall, A.W.; Olkin, I. (1979). Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Academic Press, New York.
- Pledger, P. And Proschan, F. (1971). Comparisons of order statistics and of spacings from heterogeneous distributions. In Optimizing Methods in statistics. Academic Press, New York, 89-113. ed. Rustagi, J.S.
- Proschan, F.; Sethuraman, J. (1979). Stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous populations, with applications in reliability. *J. Multivariate Anal.* **6**, 608-616.
- Rojo, J.; He, G.Z. (1991). New Properties and characterizations of dispersive ordering. *Statist. Probab. Lett.* **11**, 365-372.
- Sathe, Y. (1984). Dispersive ordering of distributions. *Adv. in Appl. Probab.* **16**, 692.
- Saunders, I.W.; Moran, P.A.P. (1978). On quantiles of the gamma and F distributions. *J. Appl. Probab.* **15**, 426-432.
- Shaked, M. (1982). Dispersive ordering of distributions. *J. Appl. Probab.* **19**, 310-320.
- Shaked, M.; Shanthikumar, J.G. (1994). Stochastic Orders and their Applications. Academic Press, San Diego, CA.
- Yanagimoto, T.; Sibuya, M. (1976). Isotonic tests for spread and tail. *Ann. Inst. Statist. Math.* **28**, 329-342.

آخرین اصلاح:	۱۳۸۵	دریافت:	۱۳۸۴ مهر ۲۷
--------------	------	---------	-------------

بهاءالدین خالدی

گروه آمار، دانشکده‌ی علوم

دانشگاه رازی،

کرمانشاه،

ایران.

دانشگاه، شهید بهشتی،

تهران، ایران.

پیامنگار: *bkhaledi@hotmail.com*