Statistical Research and Training Center
©(2005) J. Stat. Res. Iran **2** 55-68

مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
دوره‌ی ۲، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۸۴، صص ۳۹-۵۲
پژوهشکده‌ی آمار

بازه‌های اطمینان آزادتوزیع برای چندک‌های جامعه بر اساس آماره‌های کرانگین در یک طرح چندنمونه‌ای

مصطفی رزمخواه* و جعفر احمدی و بهاره خطیب آستانه

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده. فرض کنید X_{i1}، ...، X_{in_i} نمونه‌ای تصادفی از توزیع F^{α_i}، $i = 1, \ldots, k$ باشد که در آن F تابع توزیع مطلقاً پیوسته است و $\alpha_i > 0$. همچنین فرض کنید نمونه‌ها مستقل از هم باشند و M_{i,n_i} و M'_{i,n_i} به ترتیب ماکسیمم و مینیمم متناظر با نمونه‌ی iام، $i = 1, \ldots, k$ باشند. تعیین بازه‌های اطمینان آزادتوزیع برای چندک‌های جامعه‌ی F با استفاده از توابعی از آماره‌های بالا هدف اصلی این مقاله است. مسئله در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرارگرفته و در هر حالت، بازه‌های اطمینان مورد نظر محاسبه شده است.

واژگان کلیدی. آماره‌های ترتیبی کرانگین؛ بازه‌ی اطمینان؛ تابع نرخ خطر معکوس؛ چندک؛ احتمال پوشش؛ مدل F^{α}.

۱ مقدمه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x)$ باشد. در این صورت چندک مرتبه‌ی pام توزیع متغیر تصادفی X که با ξ_p نشان داده می‌شود، عبارت است ازکوچک‌ترین عددی مانند x که در نامعادله‌ی

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات.

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

$F(x) \geqslant p$ صدق کند؛ یعنی

$$\xi_p = \inf\{x : F(x) \geqslant p\}.$$

اگر یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، آن‌گاه چندک مرتبه‌ی pام توزیع آن عددی است مانند x که در تساوی $F(x) = p$ صدق کند. در حالت خاص $p = \frac{1}{2}$، $\xi_{\frac{1}{2}}$ میانه‌ی جامعه است. چندک‌ها و توابعی از آن‌ها را می‌توان برای ساختن معیارهای مکانی و پراکندگی یک توزیع به کار برد.

هرگاه شکل تابعی توزیع مورد نظر معلوم و فقط مقادیر یک یا چند پارامتر نامعلوم باشد می‌توانیم برآوردگرهای نقطه‌ای، برآوردگرهای بازه‌ای و آزمون فرض را بر اساس شکل تابعی توزیع جامعه انجام دهیم. اما در بیش‌تر مسائل شکل تابعی توزیع جامعه نامعلوم است و باید از فنونی استفاده کنیم که به روش‌های ناپارامتری یا آزادتوزیع معروفند. هرگاه همه‌ی مشاهدات در اختیار باشند، آماره‌های مرتب نقش اساسی در ارتباط با استنباط درباره‌ی چندک‌ها ایفا می‌کنند. سرفلینگ (۱۹۸۰)، آرنولد و همکاران (۱۹۹۲) و دیوید و ناگاراجا (۲۰۰۳) از جمله کتاب‌های معروفی هستند که به اهمیت آماره‌های ترتیبی در مسائل استنباط مربوط و چندک‌ها پرداخته‌اند.

در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی در خصوص استنباط آزادتوزیع بر اساس رکوردها مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. گولاتی و پاجت (۲۰۰۳) مجموعه‌ی کارهای انجام شده در این راستا را جمع‌آوری نموده‌اند. احمدی و ارقامی (۲۰۰۳)، احمدی و بالاکریشنان (۲۰۰۵، ۲۰۰۴) بازه‌های اطمینان آزادتوزیع بر اساس آماره‌های رکوردی برای چندک‌های جامعه را به دست آورده‌اند. اما مقاله‌های زیادی در زمینه‌ی استفاده از آماره‌های مرتب در بازه‌های اطمینان و آزمون‌های فرض آزادتوزیع مربوط به چندک‌ها به چاپ رسیده است که از آن جمله می‌توان به کروسکی (۱۹۷۶)، ساتی و لینگراس (۱۹۸۱)، زو و سان (۲۰۰۰)، چن (۲۰۰۰)، زیلینسکی (۲۰۰۵) و اوزتارک و دشپاند (۲۰۰۶) اشاره نمود.

اما موارد زیادی وجود دارند که همه‌ی داده‌ها ثبت نمی‌شوند و فقط کوچک‌ترین یا بزرگ‌ترین آن‌ها حائز اهمیت هستند. حالتی را در نظر بگیرید که آزمایشی در دوره‌های متفاوت انجام می‌شود؛ مثل مسابقات علمی که در آن‌ها فقط بالاترین رتبه (ماکسیمم داده‌ها) حائز اهمیت است یا در مسابقات سرعتی که در آن‌ها کم‌ترین زمان (مینیمم مشاهدات) مورد توجه می‌باشد. گاهی نیز ممکن است هم مینیمم و هم ماکسیمم مشاهدات در دوره‌های متوالی ثبت شده باشند؛ مانند بالاترین و پایین‌ترین دمای هوا در طول یک هفته یا یک ماه. بنا بر این، این موضوع که بتوانیم با استفاده از آماره‌های کرانگین در نمونه‌های متوالی، تحلیل آماری و استنباط درباره‌ی جامعه‌ی پایه را انجام دهیم، حائز اهمیت است.

در این مقاله طرحی از نمونه‌گیری را مطرح می‌کنیم که در آن k نمونه هر یک به اندازه‌ی n_i، $i = 1, \ldots, k$ و به‌طور مستقل از هم از یک جامعه‌ی پایه مانند F استخراج می‌شوند و سپس با استفاده از آماره‌های

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

کرانگین در این نمونه‌ها سعی می‌کنیم تا برای چندک‌های جامعه‌ی F برآوردگر بازه‌ای پیدا کنیم. توجه شود که نمونه‌ها در طول زمان از جامعه‌ی پایه استخراج می‌شوند و از طرفی ممکن است جامعه‌ی پایه در این خلال اندکی تغییر کند. فرض کنید این تغییرات را به‌صورت F^{α_i} نشان دهیم؛ یعنی فرض بر این است که نمونه‌ی iام از توزیع $F_i = F^{\alpha_i}$ استخراج می‌شود که در آن F همان توزیع پایه‌ی جامعه است. در واقع تابع نرخ خطر معکوس نمونه‌ی iام، α_i برابر تابع نرخ خطر جامعه‌ی پایه است. این مدل در مقاله‌ها به مدل F^{α} یا مدل نرخ خطر معکوس متناسب معروف است. مدل F^{α} شامل یک دنباله‌ی نامتناهی $\{Y_n, n \geqslant ۱\}$ از متغیرهای تصادفی مستقل است که تابع توزیع تجمعی Y_n به شکل $F_n(y) = \{F(y)\}^{\alpha(n)}$، $\alpha(n) > ۰$ می‌باشد. نزروف (۱۹۹۰) به این مدل به‌عنوان یک طرح F^{α} اشاره نموده است. در سال‌های اخیر مقاله‌های زیادی در خصوص ترتیب‌های تصادفی این مدل به چاپ رسیده است، از جمله می‌توان به خالدی و کوچار (۲۰۰۴) اشاره نمود.

هدف اصلی ما در این مقاله ابتدا محاسبه‌ی برآوردگر بازه‌ای برای چندک‌های جامعه‌ی پایه در حالت کلی مدل F^{α} بر اساس آماره‌های ترتیبی و سپس تعمیم نتایج به دست آمده به حالات خاص است.

در این مقاله ابتدا در بخش دوم به بیان چند لم ابزاری می‌پردازیم. در بخش سوم به تعیین بازه‌های اطمینان آزادتوزیع برای چندک مرتبه‌ی pام جامعه بر اساس ماکسیمم نمونه‌ها می‌پردازیم و سپس در بخش چهارم همین کار را بر اساس مینیمم نمونه‌ها انجام می‌دهیم. در بخش پنجم، هم ماکسیمم و هم مینیمم نمونه‌ها را در تعیین بازه‌های اطمینان به کار می‌بریم. سرانجام در بخش ششم، به تفسیر نتایج به دست آمده در بخش‌های پیشین می‌پردازیم.

۲ چند لم اساسی

فرض کنید $X_{i۱}$، ...، X_{in_i} نمونه‌ای تصادفی از توزیع F^{α_i}، $i = ۱, \ldots, k$ باشد که در آن F تابع توزیع مطلقاً پیوسته‌ای است و $\alpha_i > ۰$. همچنین فرض کنید نمونه‌ها مستقل از هم باشند و M_{i,n_i} و M'_{i,n_i} به‌ترتیب ماکسیمم و مینیمم متناظر با نمونه‌ی iام، $i = ۱, \ldots, k$ باشند. در این مقاله سعی بر آن داریم تا با استفاده از آماره‌های معرفی شده، برای چندک‌های جامعه‌ی اصلی؛ یعنی F، برآوردگر بازه‌ای محاسبه کنیم. در راستای این هدف برخی از ابزار لازم برای محاسبه‌ی فرمول‌های مربوط را در قالب چند لم، بدون اثبات آن‌ها بیان می‌کنیم.

لم ۱ فرض کنید $X_۱$، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع پیوسته‌ی F و تابع چگالی احتمال f باشند. همچنین فرض کنید $X_{i:n}$، نشان دهنده‌ی iامین آماره‌ی مرتب در نمونه‌ای به

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

اندازه‌ی n از این جامعه باشد. در این صورت تابع چگالی احتمال توأم $X_{1:n}$ و $X_{n:n}$ عبارت است از

$$f_{X_{1:n},X_{n:n}}(x,y) = n(n-1)f(x)f(y)\{F(y)-F(x)\}^{n-2}.$$

لم ۲ فرض کنید X_i، $i = 1,\ldots,n$، متغیرهای تصادفی مستقل از هم اما ناهم‌توزیع باشند به‌طوری که X_i دارای تابع توزیع F_i باشد. در این صورت

$$P(X_{i:n} \leqslant x) = \sum_{r=i}^{n}\sum_{A_r}\prod_{s=1}^{r} F_{X_{t_s}}(x) \prod_{s=r+1}^{n} \bar{F}_{X_{t_s}}(x),$$

که در آن A_r مجموع روی تمام جایگشت‌های $(t_1,\ldots,t_n)$ از اعداد $1,\ldots,n$ است که $t_1 < \cdots < t_r$ و $t_{r+1} < \cdots < t_n$.

لم ۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع پیوسته‌ی F باشد. در این صورت $F(X)$ دارای توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه‌ی $(0,1)$ است.

لم ۴ تحت مفروضات لم ۱، $U_{r:n} = F(X_{r:n})$ هم‌توزیع با rامین آماره‌ی مرتب در نمونه‌ای به اندازه‌ی n از توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه‌ی $(0,1)$ است.

۳ بازه‌های اطمینان بر اساس ماکسیمم نمونه‌ها

در این بخش برای چندک مرتبه‌ی pام جامعه‌ی اصلی، $\xi_p = F^{-1}(p)$، بر اساس ماکسیمم نمونه‌ها، M_{i,n_i}ها، برآوردگر بازه‌ای پیدا می‌کنیم که به توزیع جامعه بستگی ندارد. ابتدا توجه شود که اگر برای $i = 1,\ldots,k$ و $j = 1,\ldots,n_i$، $X_{ij} \sim F^{\alpha_i}$ آنگاه $M_{i,n_i} \sim F^{\alpha_i n_i}$. در نتیجه بنا به لم ۳

$$\begin{aligned} P(M_{i,n_i} \leqslant \xi_p) &= P\{M_{i,n_i} \leqslant F^{-1}(p)\} \\ &= P\{F(M_{i,n_i}) \leqslant p\} \\ &= P\{F^{\alpha_i n_i}(M_{i,n_i}) \leqslant p^{\alpha_i n_i}\} \\ &= p^{\alpha_i n_i}. \end{aligned}$$

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

بنا بر این، بازه‌ی اطمینان مبتنی بر دو ماکسیمم متفاوت (i و j، $i \neq j$)، دارای ضریب اطمینان زیر است

$$\begin{aligned} P(M_{i,n_i} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j,n_j}) &= P(M_{i,n_i} \leqslant \xi_p)P(M_{j,n_j} \geqslant \xi_p) \\ &= p^{\alpha_i n_i}(1 - p^{\alpha_j n_j}), \end{aligned} \tag{1}$$

که تساوی اول از خاصیت مستقل بودن نمونه‌ها به دست آمده است. اما ممکن است $M_{i,n_i} > M_{j,n_j}$ که در این صورت بازه‌ی اطمینان (M_{i,n_i}, M_{j,n_j}) برای ξ_p بی‌معنی خواهد بود. در این حالت می‌توانیم آماره‌های مرتب‌شده‌ی M_{j,n_j} و M_{i,n_i} را به‌صورت $M_{ij1} \leqslant M_{ij2}$ در نظر بگیریم که در این صورت ضریب اطمینان عبارت است از

$$\begin{aligned} P(M_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij2}) &= P(M_{i,n_i} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j,n_j}) + P(M_{j,n_j} \leqslant \xi_p \leqslant M_{i,n_i}) \\ &= P(M_{i,n_i} \leqslant \xi_p)P(M_{j,n_j} \geqslant \xi_p) \\ &\quad + P(M_{j,n_j} \leqslant \xi_p)P(M_{i,n_i} \geqslant \xi_p) \\ &= p^{\alpha_i n_i}(1 - p^{\alpha_j n_j}) + p^{\alpha_j n_j}(1 - p^{\alpha_i n_i}). \end{aligned} \tag{2}$$

اما برای رفع مشکل بالا می‌توانستیم از همان ابتدا M_{i,n_i}ها، $i = 1, 2, \ldots, k$ را طوری مرتب کنیم که $M_{1:k} \leqslant M_{2:k} \leqslant \ldots \leqslant M_{k:k}$. در این صورت با در نظر گرفتن $(M_{i:k}, M_{j:k})$ که در آن $i < j$، به‌عنوان بازه‌ی اطمینانی برای چندک مرتبه‌ی pام جامعه‌ی اصلی، ضریب اطمینان مربوط بنا به لم ۲ عبارت است از

$$\begin{aligned} P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k}) &= P(M_{i:k} \leqslant \xi_p) - P(M_{j:k} \leqslant \xi_p) \\ &= \sum_{r=i}^{j-1} \sum_{A_r} p^{\sum_{s=1}^{r} n_{t_s}\alpha_{t_s}} \prod_{s=r+1}^{k} (1 - p^{n_{t_s}\alpha_{t_s}}), \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن A_r در لم ۲ تعریف شده است.

نتیجه‌ی ۱ روابط (۲) و (۳) در حالات خاص به‌صورت زیر ساده می‌شوند.

آ) حالتی را در نظر بگیرید که برای i، $i = 1, \ldots, k$، داشته باشیم $\alpha_i = 1$ و $n_i = n$، در این صورت

$$P(M_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij2}) = 2p^n(1 - p^n) \tag{4}$$

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

و

$$P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k}) = \sum_{r=i}^{j-1} \binom{k}{r} p^{nr}(1-p^n)^{k-r}, \tag{5}$$

که در آن $\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!}$.

ب) فرض کنید که برای i، $i = 1, \ldots, k$، داشته باشیم، $\alpha_i = \frac{1}{n_i}$. در این صورت:

$$P(M_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij2}) = 2p(1-p) \tag{6}$$

و

$$P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k}) = \sum_{r=i}^{j-1} \binom{k}{r} p^{r}(1-p)^{k-r}. \tag{7}$$

ج) اگر برای $i = 1, \ldots, k$، $\alpha_i = \frac{n^*}{n_i}$ که در آن $n^* = \sum_{i=1}^{k} n_i$، آن‌گاه

$$P(M_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij2}) = 2p^{n^*}(1-p^{n^*}) \tag{8}$$

و

$$P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k}) = \sum_{r=i}^{j-1} \binom{k}{r} p^{rn^*}(1-p^{n^*})^{k-r}. \tag{9}$$

سؤال: i و j مطلوب را چگونه انتخاب کنیم؟

واضح است که i و j را باید به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که برای ضریب اطمینان α_0 و مرتبه‌ی چندک داده شده، بازه‌ی اطمینان مربوط دارای کوتاه‌ترین طول باشد به‌طوری که احتمال پوشش آن حد اقل به اندازه‌ی α_0 باشد. ملاحظه می‌شود که در هر یک از حالت‌های (آ)، (ب) و (ج) مقدار $P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k})$ بر اساس یک توزیع دوجمله‌ای محاسبه می‌شود و در هر حالت می‌توانیم i و j را طوری تعیین کنیم که بنا به مطلوبیت موجود $P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k})$ بزرگ‌تر از $P(M_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij2})$ و یا بزرگ‌تر از احتمال از پیش تعیین شده‌ی α_0 باشد. اما انتخاب i و j یکتا نیست و انتخابی که $j-i$ را حد اقل می‌کند، مناسب به نظر می‌رسد. از طرفی می‌دانیم تابع جرم احتمال دوجمله‌ای $C(r,k)p^r(1-p)^{k-r}$ یک تابع تک‌مدی با مد $[kp]$، بزرگ‌ترین مقدار صحیح کوچک‌تر یا مساوی با kp است که این تابع با معلوم بودن k و p تا حدود $[kp]$ افزایش و سپس کاهش می‌یابد. بنا بر این، اگر بخواهیم به حد اقل $j-i$ برسیم، باید با i و j نزدیک به $[kp]$ شروع کنیم و به تدریج $j-i$ را افزایش دهیم تا به وضعیت مطلوب برسیم. توجه

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

شود که در حالت (ب)، وقتی که $p = ۰/۵$، کوچک‌ترین مقدار $j - i$ با انتخاب $j = k - i + ۱$ به دست می‌آید. گاهی ممکن است با انتخاب بازه‌ی اطمینان $(M_{i:k}, M_{j:k})$ دقیقاً به سطح اطمینان مورد نظر $\alpha_۰$ نرسیم. در این صورت می‌توانیم بازه‌ای به شکل (M_L, M_U) را طوری تعیین کنیم که برای $۰ \leqslant \lambda \leqslant ۱$ داشته باشیم $M_L = (۱ - \lambda)M_{i:k} + \lambda M_{i+۱:k}$ و $M_U = (۱ - \lambda)M_{k-i+۱:k} + \lambda M_{k-i:k}$.

فرض کنید بازه‌های $(M_{i:k}, M_{k-i+۱:k})$، $(M_{i+۱:k}, M_{k-i:k})$ و (M_L, M_U) به‌ترتیب دارای ضرایب اطمینان γ_i، $\gamma_{i+۱}$ و $\alpha_۰$ باشند. در این صورت $\alpha_۰ \in [\gamma_{i+۱}, \gamma_i)$ و λ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\lambda = \frac{(k-i)I}{i + (k - ۲i)I}, \qquad I = \frac{\gamma_i - \alpha_۰}{\gamma_i - \gamma_{i+۱}}.$$

۴ بازه‌های اطمینان بر اساس مینیمم نمونه‌ها

در این بخش برای چندک مرتبه‌ی pام جامعه‌ی اصلی، $\xi_p = F^{-۱}(p)$، بر اساس مینیمم نمونه‌ها، M'_{i,n_i}ها، برآوردگر بازه‌ای آزادتوزیع پیدا می‌کنیم. ابتدا توجه شود که اگر برای i، $i = ۱, \ldots, k$ و $j = ۱, \ldots, n_i$، $X_{ij} \sim F^{\alpha_i}$ آن‌گاه $M'_{i,n_i} \sim ۱ - (۱ - F^{\alpha_i})^{n_i}$. فرض کنید بخواهیم بازه‌ی اطمینان مبتنی بر مینیمم دو نمونه‌ی متفاوت (i و j، $i \neq j$) را مورد بررسی قرار دهیم. در این حالت مرتب شده‌ی این دو آماره را به‌صورت $M'_{ij۱} < M'_{ij۲}$ نشان می‌دهیم که احتمال پوشش بازه‌ی اطمینان مربوط به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} P(M'_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{ij۲}) &= P(M'_{i,n_i} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{j,n_j}) + P(M'_{j,n_j} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{i,n_i}) \\ &= \{۱ - (۱ - p^{\alpha_i})^{n_i}\}(۱ - p^{\alpha_j})^{n_j} \\ &\quad + \{۱ - (۱ - p^{\alpha_j})^{n_j}\}(۱ - p^{\alpha_i})^{n_i}. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

اما اگر بخواهیم از بین آماره‌های $M'_{۱:k} < M'_{۲:k} < \cdots < M'_{k:k}$ دو آماره را به‌عنوان یک برآوردگر بازه‌ای برای ξ_p در نظر بگیریم، در این صورت ضریب اطمینان بازه‌ی مورد نظر، بنا به لم ۲ عبارت است از

$$P(M'_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{j:k}) = \sum_{r=i}^{j-۱} \sum_{A_r} \{۱ - (۱ - p^{\alpha_{t_s}})^{n_{t_s}}\} \prod_{s=r+۱}^{k} (۱ - p^{\alpha_{t_s}})^{n_{t_s}}, \tag{۱۱}$$

که در آن A_r در لم ۲ تعریف شده است.

نتیجه‌ی ۲ در حالت خاص که برای $i = ۱, \ldots, k$ داشته باشیم، $\alpha_i = ۱$ و $n_i = n$، روابط بالا

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

به‌صورت زیر ساده می‌شوند.

$$P(M'_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{ij2}) = 2\{1-(1-p)^n\}(1-p)^n \tag{12}$$

و

$$P(M'_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{j:k}) = \sum_{r=i}^{j-1} \binom{k}{r} \{1-(1-p)^n\}^r (1-p)^{n(k-r)}. \tag{13}$$

ملاحظه می‌شود که مقدار $P(M'_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{j:k})$ بر اساس یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای k و $1-(1-p)^n$ محاسبه می‌شود و بنا بر این، تمام مطالبی را که در بخش ۳ بیان کردیم برای این بخش نیز قابل تعمیم هستند.

۵ بازه‌های اطمینان بر اساس مینیمم و ماکسیمم نمونه‌ها

منطقی به‌نظر می‌رسد که در طرح نمونه‌گیری مورد بررسی در این مقاله، بازه‌های اطمینان به دست آمده بر اساس ماکسیمم نمونه‌ها برای چندک‌های بالا ($p \geqslant 0/5$) و انواع مبتنی بر مینیمم نمونه‌ها برای چندک‌های پایین ($p \leqslant 0/5$)، بهتر عمل کنند که البته این موضوع در بخش ششم به‌طور مفصل تحلیل خواهد شد. اما گاهی هم مینیمم و هم ماکسیمم نمونه‌ها را در اختیار داریم که در این صورت ترجیح می‌دهیم از اطلاعات موجود در هر دو آماره استفاده کنیم. در این بخش برای چندک مرتبه‌ی pام جامعه‌ی اصلی، $\xi_p = F^{-1}(p)$، در دو حالت زیر طوری برآوردگر بازه‌ای آزادتوزیع پیدا می‌کنیم که هم مینیمم و هم ماکسیمم نمونه‌ها در آن مؤثر باشند.

۵/۱ برآورد بر اساس مینیمم و ماکسیمم‌های مستقل از هم

در این حالت اگر آماره‌ی مینیمم را از یک نمونه و آماره‌ی ماکسیمم را از نمونه‌ای دیگر انتخاب کنیم، از آن‌جایی که نمونه‌ها مستقل از هم می‌باشند، لذا آماره‌های مورد نظر نیز مستقل از هم هستند. بنا بر این، بازه‌ی اطمینانی به‌صورت (M'_{i,n_i}, M_{j,n_j})، $i \neq j$ دارای ضریب اطمینان زیر است

$$\begin{aligned} P(M'_{i,n_i} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j,n_j}) &= P(M'_{i,n_i} \leqslant \xi_p) P(M_{j,n_j} \geqslant \xi_p) \\ &= \{1-(1-p^{\alpha_i})^{n_i}\}(1-p^{\alpha_j n_j}). \end{aligned} \tag{14}$$

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

اما ممکن است در اینجا نیز مشکلی مشابه بخش سوم رخ دهد، یعنی $M'_{i,n_i} > M_{j,n_j}$. در این حالت بازه‌ی اطمینان (M'_{i,n_i}, M_{j,n_j}) برای ξ_p بی‌معنی خواهد بود. حال اگر آماره‌های مرتب شده‌ی M_{j,n_j} و M'_{i,n_i} را به‌صورت $V_{ij۱} \geqslant V_{ij۲}$ درنظر بگیریم، آن‌گاه

$$\begin{aligned} P(V_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant V_{ij۲}) &= P(M'_{i,n_i} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j,n_j}) + P(M_{j,n_j} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{i,n_i}) \\ &= P(M'_{i,n_i} \leqslant \xi_p) P(M_{j,n_j} \geqslant \xi_p) \\ &\quad + P(M_{j,n_j} \leqslant \xi_p) P(M'_{i,n_i} \geqslant \xi_p) \\ &= \{۱ - (۱ - p^{\alpha_i})^{n_i}\}(۱ - p^{\alpha_j n_j}) + p^{\alpha_j n_j}(۱ - p^{\alpha_i})^{n_i}. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

نتیجه‌ی ۳ در حالتی خاص که برای $i = ۱, \ldots, k$ داشته باشیم، $\alpha_i = ۱$ و $n_i = n$، ضریب اطمینان موجود در رابطه‌ی (۱۵) به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$P(V_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant V_{ij۲}) = \{۱ - (۱ - p)^n\}(۱ - p^n) + p^n(۱ - p)^n. \tag{۱۶}$$

۵٫۲ برآورد بر اساس مینیمم و ماکسیمم‌های وابسته

حالتی را در نظر بگیرید که هر دو آماره‌ی مینیمم و ماکسیمم را از یک نمونه انتخاب کرده باشیم. در این صورت بدیهی است که این آماره‌ها به هم وابسته هستند. فرض کنید M_{i,n_i} ماکسیمم نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n_i از جامعه‌ی F^{α_i} و M'_{i,n_i} مینیمم همان نمونه باشد. در این صورت با توجه به توزیع آماره‌های یاد شده، که به‌ترتیب در بخش‌های ۳ و ۴ آمده است و لم ۴، $M^*_{n_i} = F^{\alpha_i}(M_{i,n_i})$ و $M'^*_{n_i} = F^{\alpha_i}(M'_{i,n_i})$ به‌ترتیب هم‌توزیع با ماکسیمم و مینیمم نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n_i از توزیع $U(۰, ۱)$ هستند. بنا بر این، احتمال پوشش بازه‌ی اطمینانی به‌صورت (M'_{i,n_i}, M_{i,n_i}) برای ξ_p بنا به لم ۱ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} P(M'_{i,n_i} \leqslant \xi_p \leqslant M_{i,n_i}) &= P(M'_{i,n_i} \leqslant F^{-۱}(p) \leqslant M_{i,n_i}) \\ &= P\{F^{\alpha_i}(M'_{i,n_i}) \leqslant p^{\alpha_i} \leqslant F^{\alpha_i}(M_{i,n_i})\} \\ &= P(M'^*_{n_i} \leqslant p^{\alpha_i} \leqslant M^*_{n_i}) \end{aligned}$$

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

$$= \int_{0}^{p^{\alpha_i}} \int_{p^{\alpha_i}}^{1} n_i(n_i-1)(y-x)^{n_i-2}\, dy\, dx$$
$$= \int_{0}^{p^{\alpha_i}} \int_{p^{\alpha_i}}^{1} f_{M'^{*}_{n_i}, M^{*}_{n_i}}(x,y)\, dy\, dx$$
$$= 1 - p^{\alpha_i n_i} - (1-p^{\alpha_i})^{n_i}. \tag{۱۷}$$

نتیجه‌ی ۴ در حالت خاصی که برای i، $i = 1, \ldots, k$، داشته باشیم، $\alpha_i = 1$ و $n_i = n$، ضریب اطمینان بالا به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(M'_{i,n} \leqslant \xi_p \leqslant M_{i,n}) = 1 - p^n - (1-p)^n. \tag{۱۸}$$

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این بخش با توجه به مطالب بیان شده در بخش‌های پیشین، نقش آماره‌های مینیمم و ماکسیمم را در پیدا کردن بازه‌ی اطمینان‌های آزادتوزیع برای چندک‌های جامعه‌ی اصلی؛ یعنی F، مشخص نموده و تا حد امکان تعیین می‌کنیم که در چه مواقعی، کدام نوع از آن‌ها بهتر عمل می‌کنند. مطالب خود را در قالب چند نتیجه در حالتی خاص که برای i، $i = 1, \ldots, k$، داشته باشیم $\alpha_i = 1$ و $n_i = n$، به تفصیل بیان می‌کنیم.

نتیجه‌ی ۵ با توجه به روابط (۴) و (۱۲) و با تعریف تابع

$$h(p) = P(M_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij2}) - P(M'_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{ij2}),$$

ملاحظه می‌شود که این تابع نسبت به نقطه‌ی $(0.5, 0)$ متقارن است؛ یعنی $h(0.5+p) = -h(0.5-p)$ و از طرفی برای $p > 0.5$، $h(p) > 0$. بنا بر این، اگر $p > 0.5$، آن‌گاه $P(M_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij2}) > P(M'_{ij1} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{ij2})$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $p > 0.5$، آن‌گاه $P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{i:k}) > P(M'_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{i:k})$ و اگر $p < 0.5$، آن‌گاه جهت نابرابری بالا عوض خواهد شد؛ یعنی، در این حالت اگر $p > 0.5$، آن‌گاه برآوردگر بازه‌ای بر اساس ماکسیمم دو نمونه‌ی متفاوت دارای ضریب اطمینان بیش‌تری است و اگر $p < 0.5$، آن‌گاه برآوردگر بازه‌ای بر اساس مینیمم دو نمونه‌ی متفاوت بهتر است. همچنین توجه شود که $h(0.5) = 0$، لذا در برآورد میانه‌ی جامعه؛ یعنی، $\xi_{0.5}$، مینیمم و ماکسیمم دو نمونه‌ی متفاوت رفتاری یکسان دارند.

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

نتیجه‌ی ۶ با توجه به رابطه‌ی (۱۶) ملاحظه می‌شود که تابع $f(p) = P(V_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant V_{ij۲})$ نسبت به خط $p = ۰/۵$ متقارن است؛ یعنی، $f(۰/۵ + p) = f(۰/۵ - p)$. از طرفی این تابع با افزایش p تا $p = ۰/۵$ افزایش و سپس کاهش می‌یابد. بنا بر این، بازه‌ی اطمینان برای چندک مرتبه‌ی pام جامعه‌ی F بر اساس مینیمم یک نمونه و ماکسیمم نمونه‌ای دیگر برای مقادیر نزدیک به $p = ۰/۵$، دارای ضریب اطمینان بیش‌تری است.

در نتایج ۷، ۸ و ۹ به تشریح این مطلب می‌پردازیم که با داشتن هم مینیمم و هم ماکسیمم نمونه‌ها، استفاده از کدام نوع آن‌ها مطلوب‌تر است.

نتیجه‌ی ۷ با توجه به روابط (۴) و (۱۶) و با تعریف تابع

$$g(p) = P(V_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant V_{ij۲}) - P(M_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant M_{ij۲}),$$

ملاحظه می‌شود که $g(\sqrt[n]{۰/۵}) = ۰$. از طرفی برای $۰ < p < \sqrt[n]{۰/۵}$، $g(p) > ۰$ و برای $\sqrt[n]{۰/۵} < p < ۱$، $g(p) < ۰$. بنا بر این، اگر $۰ < p < \sqrt[n]{۰/۵}$، آن‌گاه به‌منظور تعیین برآوردگر بازه‌ای برای ξ_p، در صورت امکان از مینیمم یک نمونه و ماکسیمم نمونه‌ای دیگر استفاده می‌کنیم، در حالی که اگر $\sqrt[n]{۰/۵} < p < ۱$، آن‌گاه ترجیح می‌دهیم از ماکسیمم‌های دو نمونه‌ی مستقل برای رسیدن به منظور بالا استفاده نماییم. همچنین برای $p = \sqrt[n]{۰/۵}$ دو نسخه‌ی بالا رفتار یکسانی دارند.

نتیجه‌ی ۸ مشابه نتیجه‌ی ۷، با توجه به روابط (۱۲) و (۱۶) و با تعریف تابع

$$u(p) = P(V_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant V_{ij۲}) - P(M'_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant M'_{ij۲}),$$

ملاحظه می‌شود که $u(۱ - \sqrt[n]{۰/۵}) = ۰$. از طرفی برای $۰ < p < ۱ - \sqrt[n]{۰/۵}$، $u(p) < ۰$ و برای $۱ - \sqrt[n]{۰/۵} < p < ۱$، $u(p) > ۰$. بنا بر این، اگر $۱ - \sqrt[n]{۰/۵} < p < ۱$، آن‌گاه به منظور تعیین برآوردگر بازه‌ای برای ξ_p، در صورت امکان از مینیمم یک نمونه و ماکسیمم نمونه‌ای دیگر استفاده می‌کنیم، در حالی که اگر $۰ < p < ۱ - \sqrt[n]{۰/۵}$، آن‌گاه ترجیح می‌دهیم از مینیمم‌های دو نمونه‌ی مستقل برای رسیدن به منظور بالا استفاده کنیم. همچنین برای $p = ۱ - \sqrt[n]{۰/۵}$ دو نسخه‌ی بالا رفتاری یکسان دارند.

اکنون در نتیجه‌ی ۹ تلفیقی از نتایج ۷ و ۸ را در حالت کلی‌تر بیان می‌کنیم.

نتیجه‌ی ۹ با توجه به نتایج ۷ و ۸، در صورتی که محدودیتی از لحاظ استفاده از مینیمم و یا ماکسیمم نمونه‌ها نداشته باشیم، آن‌گاه به‌منظور تعیین برآوردگر بازه‌ای برای ξ_p به روش زیر عمل می‌کنیم:
اگر $۰ < p < ۱ - \sqrt[n]{۰/۵}$، آن‌گاه از مینیمم‌های دو نمونه‌ی مستقل و در صورتی که $\sqrt[n]{۰/۵} < p < ۱$، از ماکسیمم‌های دو نمونه‌ی مستقل و در غیر این صورت از مینیمم یک نمونه و ماکسیمم نمونه‌ای دیگر استفاده می‌کنیم.

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

نتیجه‌ی ۱۰ با توجه به روابط (۱۶) و (۱۸) ملاحظه می‌شود مقدار $P(V_{ij۱} \leqslant \xi_p \leqslant V_{ij۲})$ به اندازه‌ی $۲p^n(۱-p)^n$ از $P(M'_{i,n} \leqslant \xi_p \leqslant M_{i,n})$ بیش‌تر است؛ یعنی، مینیمم و ماکسیمم‌های مستقل از هم بهتر از نوع وابسته‌ی آن‌ها عمل می‌کنند.

نتیجه‌ی ۱۱ در رابطه‌ی (۵) می‌توانیم i و j را طوری تعیین کنیم که برای مقادیر مختلف k، $P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k})$ از ۰٫۹۵ بیش‌تر باشد. این مقادیر را با استفاده از نسخه‌ی ۸ نرم‌افزار Maple برای $p = ۰٫۸۵, ۰٫۹$، $n = ۵$ و $k = ۱۰, ۲۰$ محاسبه نموده و نتایج آن را در جدول ۱ آورده‌ایم.

جدول ۱. مقادیر مطلوب i و j برای n، p و k مختلف

(p,k,n)	i	j
$(۰٫۸۵, ۱۰, ۵)$	$= ۱$	$\geqslant ۸$
	$= ۲$	$\geqslant ۹$
$(۰٫۹۰, ۱۰, ۵)$	$\leqslant ۲$	$\geqslant ۹$
	$= ۳$	$= ۱۰$
$(۰٫۸۵, ۲۰, ۵)$	$\leqslant ۵$	$\geqslant ۱۴$
$(۰٫۹۰, ۲۰, ۵)$	$\leqslant ۵$	$\geqslant ۱۶$
	$۶ \leqslant i \leqslant ۸$	$\geqslant ۱۷$

نتیجه‌ی ۱۲ در رابطه‌ی (۷) می‌توانیم i و j را طوری تعیین کنیم که برای مقادیر مختلف k، $P(M_{i:k} \leqslant \xi_p \leqslant M_{j:k})$ از ۰٫۹۵ بیش‌تر باشد. این مقادیر را با استفاده از نسخه‌ی ۸ نرم‌افزار Maple برای $p = ۰٫۲۵, ۰٫۵, ۰٫۶, ۰٫۷۵$ و $k = ۱۰, ۲۰$ محاسبه نموده و نتایج آن را در جدول ۲ آورده‌ایم. توجه شود که رابطه‌ی (۷) به اندازه‌ی نمونه بستگی ندارد و لذا برای هر اندازه‌ی نمونه‌ای برقرار است.

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

جدول ۲. مقادیر مطلوب i و j برای p و k مختلف

(p,k)	i	j
$(۰/۵۰, ۱۰)$	$\leqslant ۲$	$\geqslant ۹$
$(۰/۶۰, ۱۰)$	$\leqslant ۲$	$\geqslant ۹$
	$= ۳$	$= ۱۰$
$(۰/۵۰, ۲۰)$	$\leqslant ۶$	$\geqslant ۱۵$
$(۰/۶۰, ۲۰)$	$\leqslant ۸$	$\geqslant ۱۷$
$(۰/۲۵, ۲۰)$	$= ۱$	$\geqslant ۹$
	$= ۲$	$\geqslant ۱۰$
$(۰/۷۵, ۲۰)$	$\leqslant ۱۱$	$\geqslant ۱۹$

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادات و نظرات داوران محترم که در بهبود مقاله مؤثر واقع شد، تقدیر و تشکر می‌کنند.

مرجع‌ها

Arnold, B.C.; Balakrishnan, N.; Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order Statistics.* Wiley, New York.

Ahmadi, J.; Arghami, N.R. (2003). Nonparametric confidence and tolerance interval from record values data. *Statist. Papers,* **44**, 455-468.

Ahmadi, J.; Balakrishnan, N. (2004). Confidence intervals for quantiles in terms of record range. *Statist. Probab. Lett.*, **68**, 395-405.

Ahmadi, J.; Balakrishnan, N. (2005). Distribution-free confidence intervals for quantile intervals based on current records. *Statist. Probab. Lett.*, **75**, 190-202.

Chen, Z. (2000). On ranked-set sample quatiles and their applications. *J. Statist. Plann. Inference,* **83**, 125-135.

David, H.A.; Nagaraja, H.N. (2003). *Order Statistics.* third edition, Wiley, New York.

Gulati, S.; Padgett, W.J. (2003). *Parametric and Nonparametric Inference from Record-Breaking Data.* Lecture Notes in Statistics, **172**, Springer, New York.

Khaledi, B.; Kochar, S. (2004). Ordering convolutions of gamma random variables. *Sankhya,* **66**, 466-473.

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]

Krewski, D. (1976). Distribution-free confidence intervals for quantile intervals. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **71**, 420-422.

Nevzorov, V.B. (1990). Records for nonidentical distributed random variables. *Proceeding of the 5th Vilnius conference,* **2**, 227-233, VSP, Mokslas.

Ozturk, O.; Deshpande, J. V. (2006). Ranked-set sample nonparametric quantile confidence intervals. *J. Statist. Plann. Inference,* **136**, 570-577.

Sathe, Y.S.; Lingras, S.R. (1981). Bounds for the confidence coefficient of outer and inner confidence intervals for quantile interval. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **76**, 473-475.

Serfling, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* Wiley series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley, New York.

Zhou, X.; Sun, L.; Ren, H. (2000). Quantile estimation for left truncated and right censored data. *Statist. Sinica,* **10**, 1217-1229.

Zielinski, R.; Zielinski, W. (2005). Best exact nonparametric confidence intervals for quantiles. *Statistics*, **39**, 67-71.

دریافت: ۱۱ دی ۱۳۸۴
آخرین اصلاح: ۱۳ اردیبهشت ۱۳۸۵

مصطفی رزمخواه
گروه آمار،
دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه فردوسی،
مشهد، ایران.
پیام‌نگار: *razmkhah_m@yahoo.com*

جعفر احمدی
گروه آمار،
دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه فردوسی،
مشهد، ایران.
پیام‌نگار: *ahmadi@math.um.ac.ir*

بهاره خطیب آستانه
گروه آمار،
دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه فردوسی،
مشهد، ایران.
پیام‌نگار: *khatib_b@yahoo.com*

[Downloaded from jsri.srtc.ac.ir on 2026-01-31]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.2.1.39]