

برآورده‌گر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر θ در توزیع دوچمله‌ای $Bin(n, \theta)$ تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطأ در فضای پارامتری از پایین کراندار

محمد جعفری جوزانی

دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده. روش‌های معمول برآورده‌بایی، از قبیل روش ماکسیمم درست‌نمایی، در فضاهای پارامتری کراندار تحت تابع زیان توان دوم خطأ، عموماً منجر به برآورده‌گرهای نابذیرفتنی می‌شوند. برآورده‌بایی به روش مینیماکس، روش متداول دیگری است که در چنین فضاهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد و معمولاً برآورده‌گرهای پذیرفتنی را نیز به دست می‌دهد. در این مقاله، برآورده‌گر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر θ در توزیع دوچمله‌ای تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطأ را در فضای پارامتری از پایین کراندار $[1, b] \in \theta$ به دست آورده، ویژگی‌های آن را برسی می‌کنیم. همچنین شرط لازم و کافی برای مینیماکس بودن برآورده‌گر بیزی پارامتر θ نسبت به توزیع پیشین دونقطه‌ای روی فضای پارامتری از پایین کراندار را به صورت کران پایین روی b به دست آورده، مقادیر عددی آن را بهارای مقادیر مختلف n ارائه می‌کنیم.

وازگان کلیدی. برآورده‌گر مینیماکس و پذیرفتنی؛ تابع زیان توان دوم لگاریتم خطأ؛ توزیع دوچمله‌ای؛ فضای پارامتری کراندار؛ نامساعدترین توزیع پیشین.

۱ مقدمه

یکی از مسائلی که بیشتر موقع و بهویژه در مسائل عملی با آن رو به رو هستیم، مسئله‌ی برآوردهایی در فضاهای پارامتری کراندار است. این مسئله به چند دلیل از اهمیت زیادی برخوردار بوده و مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است، که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- در بسیاری از مسائل عملی و در بررسی پدیده‌های واقعی، مانند میزان درامد، اندازه‌ی قد، و درصد افراد دارای یک ویژگی خاص، فضای پارامتری مورد بررسی، کراندار است.
- صرف نظر از جنبه‌های آماری و ریاضی برآوردهایی در فضاهای پارامتری کراندار، برآوردهای معمول پارامتر مورد بررسی در چنین فضاهایی معمولاً فاقد شرایط لازم برای یک برآوردهای خوب هستند. به عنوان مثال، روش‌های معمول برآوردهایی از قبیل روش ماکسیمم درست‌نمایی در فضاهای پارامتری کراندار تحت تابع زیان توان دوم خطای عموماً منجر به برآوردهای ناپذیرفتنی می‌شوند. به طور کلی، در چنین شرایطی هر برآوردهایی که مقادیر مرزی یا نزدیک مرزی فضای پارامتری خود را با احتمال مشبت اختیار کند، ناپذیرفتنی است.
- از آنجا که در فضاهای پارامتری کراندار، هیچ برآوردهای نااربی برای پارامتر مورد بررسی موجود نیست، استفاده از معیار نااربی در چنین موقعی سودمند نمی‌باشد و استفاده از روش‌های جایگزین و سایر معیارهای خوب بودن مانند ناوردادی، مینیماکس بودن، یا پذیرفتنی بودن، مورد توجه قرار می‌گیرد (مورس، ۱۹۸۵، ص ۲۲).

بنا بر این، مسئله‌ی برآوردهای پارامتری کراندار، یکی از مسائل مهم در استنباط آماری است. برآوردهایی به روش مینیماکس، یکی از روش‌های متداولی است که به عنوان جایگزین روش‌های معمول برآوردهایی، مانند روش ماکسیمم درست‌نمایی، در چنین فضاهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد، که معمولاً برآوردهای پذیرفتنی را نیز به دست می‌دهد. برای مرور مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی برآوردهایی در فضاهای پارامتری کراندار به مارچاند و استرادمن (۲۰۰۴) مراجعه کنید.

یکی از اولین کسانی که به مطالعه درباره‌ی برآورد مینیماکس و پذیرفتنی در فضاهای پارامتری کراندار پرداخت، کاتز (۱۹۶۱) است که توانست برآوردهای مینیماکس و پذیرفتنی برای میانگین توزیع نرمال در فضای پارامتری از پایین کراندار تحت تابع زیان توان دوم خطای را به دست آورد. در دو دهه‌ی اخیر، پژوهشگران به طور گسترشده‌ای برآوردهایی به روش مینیماکس در فضای پارامتری کراندار را مورد توجه قرار داده‌اند. برای مشاهده‌ی خلاصه و نمونه‌ای از کارهای انجام‌شده به بادر و بیشاپ (۲۰۰۲)، بیشاپ (۱۹۹۲)، جعفری جوزانی و دیگران (۲۰۰۲)، مارچاند و پارسیان (۲۰۰۶)، ون ایدن (۲۰۰۶)، و جعفری جوزانی و مارچاند (۲۰۰۷) مراجعه شود.

در بیش تر مطالعات انجام شده در زمینه‌ی برآوردهای مینیماکس در فضاهای پارامتری کراندار، تابع زیان مورد استفاده، تابع زیان توان دوم خطای، همچنین توزیع‌های مورد بررسی از نوع پیوسته بوده است؛ حال آنکه استفاده از سایر توابع زیان، بهویشه توابع زیان نامتقارن، و همچنین برآوردهای پارامتر توزیع‌های گسسته نیز مورد توجه می‌باشد و پرداختن به چنین مسائلی از اهمیت زیادی برخوردار است. در این مقاله، تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطای، که تابع زیانی نامتقارن است و به صورت

$$(1) \quad L(\theta, \delta) = (\log \delta - \log \theta)^2 = \left\{ \log \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \right\}^2$$

تعریف می‌شود، برآورده مینیماکس و پذیرفتی پارامتر نامعلوم θ را در توزیع دوجمله‌ای $\text{Bin}(n, \theta)$ با تابع احتمال زیر، در یک فضای پارامتری از پایین کراندار به صورت $[1, b) \subset \Theta$ ، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$(2) \quad P_\theta(X = x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = 0, \dots, n$$

جعفری جوزانی و مارچاند (۲۰۰۷) برآورده مینیماکس و پذیرفتی پارامتر θ در فضای پارامتری کراندار $[a, b] \subset \Theta$ را در خانواده‌ای از توزیع‌های گسسته‌ی آماری در رده‌ای از توابع زیان به صورت $L_\gamma(\theta, \delta) = (\gamma(\delta) - \gamma(\theta))^2$ به دست آورده‌اند که در آن، (\cdot, \cdot) تابعی یکنواست که در شرط $\gamma(a) = \gamma(b)$ صدق می‌کند. شایان ذکر است که با انتخاب $t = \log(\delta)$ تابع زیان $L_\gamma(\theta, \delta)$ به تابع زیان توان دوم لگاریتم خطای (۱) تبدیل می‌شود. با این حال، از آن جا که برای مسئله‌ی مورد بررسی در این مقاله، شرایط ارائه شده در جعفری جوزانی و مارچاند (۲۰۰۷) برقرار نیست، نمی‌توان از نتایج آن برای به دست آوردن برآورده مینیماکس و پذیرفتی پارامتر نامعلوم $[1, b) \subset \Theta$ در توزیع دوجمله‌ای $\text{Bin}(n, \theta)$ تحت تابع زیان (۱) استفاده کرد. برای مشاهده‌ی خلاصه‌ای از مطالعات انجام شده در زمینه‌ی برآوردهای مینیماکس و پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای در فضاهای پارامتری کراندار و غیرکراندار تحت تابع زیان توان دوم خطای، به مورس (۱۹۸۳) مراجعه کنید.

در این مقاله، در بخش ۲ ابتدا مفاهیم و نتایج مقدماتی را ذکر می‌کنیم. در بخش ۳ ضمن ارائه‌ی برآورده مینیماکس و پذیرفتی پارامتر $[1, b) \subset \Theta$ ، شرط لازم و کافی برای مینیماکس بودن برآورده بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان (۱) نسبت به توزیع پیشین دونقطه‌ای را به صورت کران پایینی روی b به دست می‌آوریم. همچنین مقادیر عددی کران پایین مذکور را به ازای مقادیر مختلف n در جدولی ارائه می‌کنیم.

۲ نتایج اولیه

فرض کنید $(X_1, \dots, X_n) = (X_1, \dots, X_n)$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n با توزیع مشترک \mathcal{P}_θ باشد که در آن، $\theta \in \Theta$ پارامتر مجهول مورد نظر است، $\Theta = [\alpha, \beta]$ فضای پارامتری است، و $\alpha < \beta$. فرض کنید $f(x, \theta)$ مشتق رادون-نیکودیم \mathcal{P}_θ نسبت به اندازه‌ی σ -متناهی μ باشد. همچنین فرض کنید برای هر $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $f(x, \alpha) + f(x, \beta) \neq 0$ و به ازای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ داشته باشیم $f(x, \alpha) f(x, \beta) > 0$ که در آن \mathcal{X} فضای نمونه‌ای است. توزیع پیشین دونقطه‌ای π را به صورت زیر روی فضای پارامتری $\Theta = [\alpha, \beta]$ در نظر می‌گیریم.

$$(3) \quad \pi(\{\alpha\}) = \eta = 1 - \pi(\{\beta\}), \quad \eta \in (0, 1)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که براوردگر بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان قوان دوم لگاریتم خطای (1) عبارت است از

$$(4) \quad \delta_\pi(X) = \exp\{E(\log \theta | X)\}.$$

همچنین توزیع پسین θ به شرط $X = x$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$(5) \quad \pi(\alpha|x) = \frac{\eta f(x, \alpha)}{\eta f(x, \alpha) + (1 - \eta) f(x, \beta)} = 1 - \pi(\beta|x).$$

بنا بر این، براورد بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان (1) نسبت به توزیع پیشین (3) به صورت

$$(6) \quad \delta_\pi(x) = \exp\left\{ \frac{\eta \log \alpha f(x, \alpha) + (1 - \eta) \log \beta f(x, \beta)}{\eta f(x, \alpha) + (1 - \eta) f(x, \beta)} \right\}$$

محاسبه می‌شود، که در آن اگر $f(x, \alpha) = 0$ باشد، خواهیم داشت $\delta_\pi(x) = \beta$ ، و اگر $f(x, \beta) = 0$ باشد، خواهیم داشت $\delta_\pi(x) = \alpha$.

برای هر $\eta \in (0, 1)$ داریم $\delta_\pi(x) < \delta_\pi(x)$: بنا بر این، $\delta_\pi(x)$ تابعی نزولی از η است و از آن جا که وقتی $\eta = 0$ باشد، داریم $\delta_\pi(x) = \beta$ ، و به ازای $\eta = 1$ داریم $\delta_\pi(x) = \alpha$ ، به راحتی تحقیق می‌شود که $\alpha \leq \delta_\pi(x) \leq \beta$: یعنی براورد بیزی (6)، مقادیر خود را در فضای پارامتری $\Theta = [\alpha, \beta]$ اختیار می‌کند.

قضیه ۱ مقدار یکتای $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$ موجود است به طوری که در آن $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$ توزیع پیشین (3) با $\eta^* = \eta$ است. به علاوه، برای $(\eta^*, 1 - \eta^*)$ داریم

$$R(\alpha, \delta_\pi) < R(\beta, \delta_\pi)$$

و برای $\eta \in (\circ, \eta^*)$ داریم

$$R(\alpha, \delta_\pi) > R(\beta, \delta_\pi).$$

برهان. قرار دهید

$$\mathcal{X}_\circ = \{x \in \mathcal{X} | f(x, \alpha)f(x, \beta) > \circ\},$$

$$\mathcal{X}_\neq = \{x \in \mathcal{X} | f(x, \alpha) = \circ, f(x, \beta) \neq \circ\},$$

$$\mathcal{X}_\neq = \{x \in \mathcal{X} | f(x, \alpha) \neq \circ, f(x, \beta) = \circ\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که

$$(7) \quad \begin{aligned} R(\theta, \delta_\pi) &= \int_{\mathcal{X}_\circ} (\log \delta_\pi - \log \theta)^\top d\mathcal{P}_\theta \\ &\quad + (\log \beta - \log \theta)^\top \mathcal{P}_\theta(\mathcal{X}_\neq) + (\log \alpha - \log \theta)^\top \mathcal{P}_\theta(\mathcal{X}_\neq). \end{aligned}$$

همچنین \circ که $A(\eta) = \log \delta_\pi(x)$ در آن، $\mathcal{P}_\alpha(\mathcal{X}_\neq) = \mathcal{P}_\beta(\mathcal{X}_\neq)$. اگر قرار دهیم $\log \alpha \leq A(\eta) \leq \log \beta$ و $\lim_{\eta \rightarrow \circ+} A(\eta) = \log \beta$ و $\lim_{\eta \rightarrow \circ-} A(\eta) = \log \alpha$ بنا بر این،

$$R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi) = \int_{\mathcal{X}_\circ} (\log \delta_\pi - \log \alpha)^\top d\mathcal{P}_\alpha - \int_{\mathcal{X}_\circ} (\log \delta_\pi - \log \beta)^\top d\mathcal{P}_\beta.$$

با استفاده از قضیه همگرایی مغلوب، داریم

$$\lim_{\eta \rightarrow \circ+} \{R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi)\} = (\log \beta - \log \alpha)^\top \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{X}_\circ) > \circ.$$

همچنین،

$$\lim_{\eta \rightarrow \circ-} \{R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi)\} = -(\log \alpha - \log \beta)^\top \mathcal{P}_\beta(\mathcal{X}_\circ) < \circ.$$

و از آنجا که $R(\theta, \delta_\pi)$ تابعی پیوسته از η است، دست‌کم یک $\eta^* \in (\circ, \circ)$ وجود دارد به‌طوری که $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$. قرار دهید

$$H(\eta) = \{A(\eta) - \log \alpha\}^\top f(x, \alpha) - \{A(\eta) - \log \beta\}^\top f(x, \beta).$$

از آن جا که $f(x, \theta)$ مشتق رادون-نیکودیم \mathcal{P}_θ نسبت به اندازه σ -متناهی μ است، داریم

$$R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi) = \int_{\mathcal{X}} H(\eta) d\mu.$$

برای هر $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} H'(\eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} H(\eta) = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} A(\eta)[\{A(\eta) - \log \alpha\}f(x, \alpha) - \{A(\eta) - \log \beta\}f(x, \beta)] \\ &= -2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} A(\eta) \right\}^* \{\eta f(x, \alpha) + (1 - \eta)f(x, \beta)\} < 0. \end{aligned}$$

این بدان معنا است که $H(\eta) - R(\alpha, \delta_\pi) - R(\beta, \delta_\pi)$ تابعی اکیداً نزولی از η است. بنا بر این، آن η^* که در $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$ صدق می‌کند، یکتا است. به علاوه، برای هر $\eta \in (\eta^*, 1]$ داریم $R(\alpha, \delta_\pi) > R(\beta, \delta_\pi)$. همچنین برای هر $\eta \in (0, \eta^*)$ داریم $R(\alpha, \delta_\pi) < R(\beta, \delta_\pi)$. حکم ثابت می‌شود.

۳ برآورد مینیماکس و پذیرفتگی پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از توزیع برونلی $\text{Bin}(1, \theta)$ باشد، که در آن، $X = \sum_{i=1}^n X_i$ قرار دهد و $0 < b < 1$. در آن، X دارای توزیع دوجمله‌ای $\text{Bin}(n, \theta)$ با تابع احتمال (۲) است. تحت توزیع پیشین (۳) با $b = b(\alpha, \beta)$ برآورده بیزی (۶) به صورت

$$(4) \quad \delta_\pi(X) = b_n I_{\{X=n\}} + b I_{\{X < n\}}$$

به دست می‌آید، که در آن، $I_A(\eta) = \exp\{b^n \eta \log b / (b^n \eta + (1 - n))\}$ تابع نشانگر پیشامد A است. همچنین تابع مخاطره‌ی برآورده بیزی (۴) تحت تابع زیان قوان دوم لگاریتم خطای (۱) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$(5) \quad R(\theta, \delta_\pi) = \log \left(\frac{b_n}{b} \right) (\log b_n + \log b - 2 \log \theta) \theta^n + (\log b - \log \theta)^2.$$

در ادامه، برآورده مینیماکس پارامتر θ تحت تابع زیان (۱۱) را به دست می‌آوریم. برای این منظور، از معیار معروف مینیماکس بودن برآورده‌های بیزی که در لم زیر آمده است استفاده می‌کنیم (برای اثبات به برگر (۱۹۸۵، بخش ۳/۵) یا لی من و کسلا (۱۹۹۸، بخش ۵/۱) مراجعه کنید).

لم ۱ فرض کنید δ_π برآورده بیزی پارامتر θ نسبت به توزیع پیشین π باشد و

$$S_\pi = \{\theta \in \Theta : \sup_{\Theta} \{R(\theta, \delta_\pi)\} = R(\theta, \delta_\pi)\}.$$

آنگاه δ_π برآورده مینیماکس است هرگاه $P_\pi(\theta \in S_\pi) = 1$

بیشتر موضع برای اثبات مینیماکس بودن برآورده‌های بیزی نسبت به توزیع‌های پیشین دونقطه‌ای، به‌ویژه در فضاهای پارامتری کراندار می‌توان از لم زیر استفاده کرد، که اثبات آن به‌کمک لم ۱ به راحتی به دست می‌آید.

لم ۲ فرض کنید δ_π برآورده بیزی پارامتر θ نسبت به توزیع پیشین دونقطه‌ای π روی $\{\alpha, \beta\}$ باشد به‌طوری که $\Theta = [\alpha, \beta]$. آنگاه δ_π برآورده مینیماکس پارامتر θ در فضای پارامتری Θ است هرگاه به عنوان تابعی از θ ,

$$\text{حد اکثر یک تغییر علامت از } - \text{ به } + \text{ داشته باشد، یا} \quad (آ)$$

$$R(\theta, \delta_\pi) \text{ محدب باشد.} \quad (\beta)$$

در قضیه‌ی ۱ نشان دادیم مقدار یکتاپی مانند (η^*, θ^*) موجود است به‌طوری که $R(\alpha, \delta_{\pi^*}) = R(\beta, \delta_{\pi^*})$ با استفاده از تابع مخاطره‌ی (۶) داریم

$$R(b, \delta_\pi) = b^n \log^\frac{1}{n} b \left(\frac{1-\eta}{b^n \eta + (1-\eta)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$R(1, \delta_\pi) = \frac{b^{\frac{1}{n}} \eta^{\frac{1}{n}} \log^\frac{1}{n} b}{\{b^n \eta + (1-\eta)\}^{\frac{1}{n}}}.$$

در نتیجه، از حل معادله‌ی $R(b, \delta_\pi) - R(1, \delta_\pi) = 0$ نسبت به η ، مقدار η^* را می‌یابیم که با جایگزین کردن در (۶) به دست می‌آید. حال با استفاده از مشتق اول $R(\theta, \delta_{\pi^*})$ نسبت به θ ، که با $\frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta, \delta_{\pi^*}) = -2\theta^{n-1} \log\left(\frac{b_n}{b}\right) + n\theta^{n-1} \left\{ \log\left(\frac{b_n}{b}\right) (\log b_n + \log b - 2\log \theta) \right\} - \frac{1}{\theta} (\log b - \log \theta)$ داشته باشد،

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta, \delta_{\pi^*}) &= -2\theta^{n-1} \log\left(\frac{b_n}{b}\right) + n\theta^{n-1} \left\{ \log\left(\frac{b_n}{b}\right) (\log b_n + \log b - 2\log \theta) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\theta} (\log b - \log \theta), \end{aligned}$$

جدول ۱. مقادیر (n) و b^* به ازای مقادیر مختلف n

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $b^*(n)$ | ۰/۷۲۹ | ۰/۸۵۴ | ۰/۹۰۰ | ۰/۹۲۴ | ۰/۹۳۸ | ۰/۹۴۸ | ۰/۹۵۵ | ۰/۹۶۱ | ۰/۹۶۵ | ۰/۹۶۸ |
| $b_*(n)$ | ۰/۷۴۹ | ۰/۸۶۵ | ۰/۹۰۶ | ۰/۹۳۰ | ۰/۹۴۳ | ۰/۹۵۳ | ۰/۹۵۹ | ۰/۹۶۵ | ۰/۹۶۸ | ۰/۹۷۱ |

شرط لازم برای مینیماکس بودن برآوردهای بیزی δ_{π^*} (که با جایگزین کردن $\eta = \eta^* = \frac{1}{b^{\frac{n}{r}} + 1}$ در (۸) به دست می‌آید) آن است که $\frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=1} < 0$ مشبّت باشد. برای این منظور، داریم

$$\frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=1} = -2 \left(\frac{b^{\frac{n}{r}}}{b^{\frac{n}{r}} + 1} \right) \log b - \frac{n}{(b^{\frac{n}{r}} + 1)^2} (2b^{\frac{n}{r}} + 1) \log^2 b.$$

از طرفی $1 < b < \frac{b^{\frac{n}{r}}}{b^{\frac{n}{r}} + 1} \log b$ و $\frac{1}{2} < \frac{1}{b^{\frac{n}{r}} + 1}$ مشبّت است هرگاه

$$\Lambda(b) = b^{\frac{n}{r}} + n(2b^{\frac{n}{r}} + 1) \log b \geq 0.$$

به علاوه، $1 = \Lambda(1)$ و $\lim_{b \rightarrow 0^+} \Lambda(b) = -\infty$. بنا بر این، یک مقدار $b^*(n)$ موجود است به‌طوری که به ازای هر $1 < b < b^*(n)$ داشته باشیم $\Lambda(b) < b < \Lambda(b)|_{\theta=1}$ و در نتیجه $\frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=1} > 0$. جدول ۱ مقدار واقعی $b^*(n)$ به ازای مقادیر مختلف n را نشان می‌دهد. همچنین از آن‌جا که

$$b^{\frac{n}{r}} + n(2b^{\frac{n}{r}} + 1) \log b > b^{\frac{n}{r}} + 3n \log b = \Psi(b),$$

که در آن، $\lim_{b \rightarrow 1^-} \Psi(b) = 1$ و $\lim_{b \rightarrow 0^+} \Psi(b) = -\infty$ و $\Psi(b)$ تابعی اکیداً صعودی از b است، $b^*(n)$ یکتاً موجود است که به ازای هر $1 < b < b^*(n)$ مقدار $\Psi(b)$ و در نتیجه $\frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta, \delta_{\pi^*})|_{\theta=1} > 0$ مشبّت است. بنا بر این، می‌توان از $b^*(n)$ به عنوان نقریبی از $\delta_{\pi^*}(n)$ استفاده کرد. جدول ۱ مقدار به ازای مقادیر مختلف n را نشان می‌دهد. حال، شرط کافی برای مینیماکس بودن δ_{π^*} را با بررسی مشتق دوم تابع مخاطره‌ی (۹) که در زیر آمده است مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} R(\theta, \delta_{\pi^*}) = \frac{1}{\theta^2} \{ 2 + Q(\theta) \},$$

که در آن،

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= -2(2n - 1)\theta^n \log \left(\frac{b_n}{b} \right) + 2(\log b - \log \theta) \\ &\quad + n(n - 1)\theta^n \log \left(\frac{b_n}{b} \right) (\log b_n + \log b - 2\log \theta) \\ &= A\theta^n + C - 2\log \theta - B\theta^n \log \theta \end{aligned}$$

و مقادیر A , B و C به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$A = n(n-1)(\log b_n - \log \theta) - 2(2n-1)(\log b_n - \log b),$$

$$B = 2n(n-1)(\log b_n - \log b),$$

$$C = 2 \log b.$$

مشتق اول $Q(\theta)$ نسبت به θ عبارت است از

$$\theta \frac{d}{d\theta} Q(\theta) = (nA - B)\theta^n - 2 - nB\theta^n \log \theta$$

و $Q(\theta)$ تابعی نزولی از θ است اگر و تنها اگر $(nA - B)\theta^n - 2 \leq nB\theta^n \log \theta$. از طرفی همان‌طور که دیدیم، به ازای هر $1 < b < b_*(n) \geq 0$ $\Psi(b) \geq \Psi(\theta) \geq \Psi(b)$. بنابراین، $\theta \geq b$ داریم $\theta^{n/2} + 3n \log \theta \geq \theta^{n/2}$. یا به عبارت دیگر، به ازای هر $\theta \geq b$ داریم $n \log \theta \geq -\frac{1}{4}\theta^{n/2} \geq -\theta^{n/2}$. همچنین واضح است که به ازای هر $1 < n \leq B$ داریم $n \log \theta \geq -\theta^{n/2} \geq -\theta^n B$. در نتیجه، $n \log \theta \geq -\theta^n B \geq -\theta^n B$. بنابراین، به ازای هر $b \leq b_*(n) \leq b$ ، براحتی می‌توان نشان داد که هرگاه $\theta \frac{d}{d\theta} Q(\theta) \leq 0$

$$(nA - B)\theta^n - 2 \leq -B\theta^n$$

یا به طور معادل،

$$n\theta^n A - 2 \leq 0$$

که با توجه به منفی بودن A ، همواره صحیح است. بنابراین، برای $1 < b \leq \theta \leq 1$ ، $Q(\theta)$ تابعی نزولی از θ است هرگاه $b_*(n) \geq b$. در نتیجه، $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} R(\theta, \delta_{\pi^*}) = \frac{1}{\theta^3} \{2 + Q(\theta)\}$ تابعی نزولی از θ است و حد اکثر یک تغییر علامت در بازه $[1, b]$ دارد. با توجه به موارد بالا، به ازای $b_*(n) < b \leq 1$ ، $b \geq b_*(n)$ به عنوان تابعی از $[1, b]$ مثبت است، یا از مثبت به منفی می‌رود، که در هر دو صورت، مینیماکس بودن δ_{π^*} به کمک لmhای ۱ و ۲ ثابت است. حال می‌توان قضیه‌ی زیر را بیان کرد.

قضیه‌ی ۲ در توزیع دوجمله‌ای (۲)، برآورده‌گر بیزی یکتای

$$\delta_{\pi^*}(X) = \exp \left\{ \frac{b^n \log b}{b^{n/2} + 1} \right\} I_{\{X=n\}} + b I_{\{X < n\}}$$

نسبت به توزیع پیشین دو نقطه‌ای (۳) با $\alpha = b$ و $\beta = 1$ تحت تابع زیان توان دوم لگاریتم خطای (۱)، برآورده‌گری مینیماکس و پذیرفتی برای $[b, 1] \in [b_*(n), 1]$ است اگر و تنها اگر $b_*(n) \geq b$. که در آن،

ریشه‌ی معادله‌ی $\pi^* = b^{\frac{n}{\tau}} + 2n \log b = 0$ است. همچنین توزیع پیشین π^* نامساعدترین توزیع پیشین است.

مراجع

- Bader, G.; Bischoff, W. (2003). Old and new aspects of minimax estimation of a bounded parameter. In *Mathematical Statistics and Applications: Festschrift for Constance van Eeden*, M. Moore, S. Froda, and C. Leger, eds. IMS Lecture Notes Monogr. Ser. **42**, Inst. Math. Stat., Beachwood, OH, pp. 15-30.
- Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd ed. Springer, New York.
- Bischoff, W. (1992). Minimax estimation and Γ -minimax estimation for functions of a scale parameter family under L_p loss. *Statist. Decisions* **29**, 45-61.
- van Eeden, C. (2006). *Restricted Parameter Space Estimation Problems: Admissibility and Minimality Properties*. Springer, New York.
- Jafari Jozani, M.; Marchand, E. (2007). Minimax estimation of constrained parametric functions for discrete families of distributions. To appear in *Metrika*.
- Jafari Jozani, M.; Nematollahi, N.; Shafie, K. (2002). Admissible and minimax estimator of a bounded scale-parameter in a subclass of the exponential family under scale-invariant squared error loss. *Statist. Probab. Lett.* **60**, 437-444.
- Katz, M. (1961). Admissible and minimax estimates of parameters in truncated spaces. *Ann. Math. Statist.* **32**, 136-142.
- Lehmann, E.L.; Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Wiley, New York.
- Marchand, E.; Parsian, A. (2006). Minimax estimation of a bounded discrete parameter. *Statist. Probab. Lett.* **76**, 547-554.
- Marchand, E.; Strawderman, W.E. (2004). Estimation in restricted parameter space: A review. In *A Festschrift for Herman Rubin*, A. Dasgupta, ed. IMS Lecture Notes Monogr. Ser. **45**, Inst. Math. Stat., Beachwood, OH, pp. 21-44.
- Moors, J.J.A. (1985). Estimation in truncated parameter spaces. Ph.D. thesis, Tilburg University, Tilburg, The Netherlands.

محمد جعفری جوزانی
گروه آمار، دانشکده‌ی اقتصاد
دانشگاه علامه طباطبائی،
خیابان شهید بهشتی، نبش خیابان احمد قصیر،
تهران، ایران.
پایه‌نگار: m.j.jozani@srtc.ac.ir

