Statistical Research Center
مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
J. Stat. Res. Iran **1** (2004) 1-12
دوره‌ی ۱، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۸۳، صص ۱-۱۲

در باره‌ی رده‌بندی‌های چندجمله‌ای‌های تصادفی

کامبیز فرهمند

دانشگاه اولستر

چکیده. فرض کنید $a_0(\omega)$، $a_1(\omega)$، $a_2(\omega)$، ...، $a_n(\omega)$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشد که بر یک فضای احتمال ثابت $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ تعریف شده است. برای تعداد مورد انتظار صفرهای واقعی یک چندجمله‌ای مانند

$$a_0(\omega)\psi_0(x) + a_1(\omega)\psi_1(x) + a_2(\omega)\psi_2(x) + \cdots + a_n(\omega)\psi_n(x)$$

که در آن $\psi_j(x)$، $j = 0, 1, 2, \ldots, n$، تابع معیّنی از x است، نتیجه‌های معلوم بسیاری در دست است. در این مقاله، مشخصه‌های گوناگون ناشی از تأثیر فرض‌های مختلف بر چندجمله‌ای‌های تصادفی $\psi_j(x)$ را مورد تأکید قرار می‌دهیم. سپس می‌توانیم چندجمله‌ای‌های تصادفی را در سه رده، رده‌بندی کنیم که هر یک در خواص مشترکی سهیم باشند. هرچند به‌طور عمده، تعداد ریشه‌های حقیقی مورد نظر است ولی چگالی ریشه‌های مختلط ناشی از فرض ضریب‌های تصادفی مختلط برای چندجمله‌ای‌ها را نیز مطالعه می‌کنیم.

واژگان کلیدی. تعداد صفرهای واقعی؛ ریشه‌های واقعی؛ چندجمله‌ای‌های جبری تصادفی؛ چندجمله‌ای‌های مثلثاتی؛ ضریب‌های دوجمله‌ای؛ فرمول کاک-رایس؛ متغیرهای تصادفی نایکسان؛ ریشه‌های مختلط.

رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی امریکا (۲۰۰۰): رده‌ی اوّلیه 60G99؛ رده‌ی ثانویه 60H99.

۱ تعریف‌ها و نتیجه‌های معلوم

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ یک فضای احتمال ثابت، و $\{a_j(\omega)\}_{j=\circ}^{n}$ برای $\omega \in \Omega$، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با واریانس $\sigma^{۲} = ۱$ باشد. مجموعه‌ی معادله‌های $y = P_n(x)$ که در آن

$$P_n(x, \omega) \equiv P_n(x) = \sum_{j=\circ}^{n} a_j(\omega)\psi_j(x) \qquad (۱)$$

یک خانواده‌ی خم‌ها را در صفحه‌ی xy نشان می‌دهد. یک راه برای درک رفتار ریاضی $P_n(x)$، نگاه کردن به تعداد دفعاتی است که این خانواده‌ی خم‌ها محور xها، یا در حالتی کلّی‌تر، خطی موازی محور xها را قطع می‌کند. بنا بر این، برای K به‌عنوان هر ثابت مطلق، $N_K(\alpha, \beta)$ را به‌عنوان تعداد ریشه‌های حقیقی $P_n(x) = K$ در (α, β)، و $EN_K(\alpha, \beta)$ را به‌عنوان امید ریاضی آن تعریف می‌کنیم. بسته به شکل $\psi_j(x)$ و فرض‌های مربوط به توزیع‌های ضریب‌های $a_j(\omega)$، برخی مقدارهای مجانبی معلوم برای $EN_K(\alpha, \beta)$ در دست است که برای n بزرگ معتبر است. در این مقاله، رفتار همه‌ی چندجمله‌ای‌هایی را که بر حسب شکل‌های مختلفِ انتخاب شده برای $\psi_j(x)$ تعریف شده‌اند، در سه رده‌ی اصلی از چندجمله‌ای‌ها رده‌بندی می‌کنیم. این رده‌ها عبارت‌اند از چندجمله‌ای‌های جبری تصادفی با $\psi_j(x) \equiv x^j$، چندجمله‌ای‌های مثلثاتی تصادفی با $\psi_j(x) \equiv \cos jx$، و چندجمله‌ای‌های تصادفی با عناصر دوجمله‌ای که از $\psi_j(x) \equiv \binom{n}{j}^{\frac{۱}{۲}} x^j$ به دست می‌آیند. کارهای قبلی در باره‌ی خواص کلّی چندجمله‌ای‌های تصادفی در کتاب جامع بهاروچا راید و سامباندهام [۲] و نتایج تازه‌تر در [۶] ارائه شده‌اند. حال این موضوع را مطرح می‌کنیم که در درون هر یک از گروه‌های بالا، خواصی یکتا در مورد مرتبه‌ی تعداد صفرها، رفتار گذرها از سطح، و اثرِ در نظر گرفتن میانگین‌های ناصفر برای ضریب‌های چندجمله‌ای‌ها وجود دارد. برای این منظور، نخست فرمولی برای تعداد مورد انتظار گذرهای یک فرایند تصادفی نامانا و شکل ساده شده‌ی آن را برای قابل استفاده بودن در کاربردهایش در چندجمله‌ای‌های تصادفی بالا به وجود می‌آوریم.

۲ فرمولی برای تعداد صفرها

فرض کنید $\xi(t)$ هر فرایند تصادفیِ نامانا با مسیر نمونه‌ی پیوسته باشد. رهیافت کلاسیک برای به دست آوردن تعداد مورد انتظار گذرها، بر اساس تعمیم فرمولی است که توسط کاک [۸] و رایس [۱۰] به‌طور مستقل برای یک مورد خاص به دست آمده است. آنان نشان داده‌اند که برای $p_t(x, y)$ به‌عنوان چگالی

احتمال توأم $\xi(t)$ و مشتق آن $\xi'(t)$، تعداد مورد انتظارگذرها از سطح K از رابطهی زیر به دست میآید:

$$EN_K(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta dt\int_{-\infty}^{\infty}|y|p_t(K,y)\ dy. \tag{۲}$$

کاربردی از فرمول بالا، به فرمولی کلّی برای تعداد مورد انتظارگذرها از سطح K منجر میشود. فرض کنید

$$m(t)\equiv m=E(\xi(t)),\qquad m'(t)\equiv m'=E(\xi'(t)),$$

$$\sigma^{۲}(t)\equiv\sigma^{۲}=\mathrm{var}(\xi(t)),\qquad \gamma^{۲}(t)\equiv\gamma^{۲}=\mathrm{var}(\xi'(t)),$$

و

$$\lambda(t)\equiv\lambda=\mathrm{cov}\{\xi(t),\xi'(t)\}.$$

در این صورت با فرض توزیع نرمال برای $\xi(t)$ بهگونهای که چگالی (نرمال) توأم برای $\xi(t)$ و $\xi'(t)$ در هر t ناتکین باشد، لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۱ فرض کنید $\rho(t)\equiv\rho=\frac{\lambda}{\sigma\gamma}$ و $\eta(t)\equiv\eta=\frac{۱}{\gamma\sqrt{۱-\rho^{۲}}}\left(m'-\frac{\gamma\rho(m-K)}{\sigma}\right)$. در این صورت با فرض بالا برای $\xi(t)$ داریم

$$EN_K(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta\frac{\gamma\sqrt{۱-\rho^{۲}}}{\sigma}\ \varphi\left(\frac{m-K}{\sigma}\right)[۲\varphi(\eta)+\eta\{۲\Phi(\eta)-۱\}]\ dt,$$

که در آن، مثل همیشه $\varphi(t)$ و $\Phi(t)$ بهترتیب، تابعهای چگالی و توزیع نرمال استاندارد هستند.

برهان. چون برای هر ثابت $c_۱$ و $c_۲$، (مثلاً نگاه کنید به [۳])

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y|\ \exp\left\{\frac{(c_۱+c_۲)^{۲}}{۲}\right\}dy=\frac{۲\exp(-c_۱^۲)-\sqrt{۲\pi}\ c_۱\{۱-\Phi(c_۱)\}}{c_۲^۲},$$

میتوانیم تابع چگالی توأم مورد نیاز برای فرمول کاک-رایس را بهصورت زیر محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}p_t(K,y)&=\frac{۱}{۲\pi\gamma\sigma\sqrt{۱-\rho^{۲}}}\ \exp\left\{\frac{-\left(\frac{\rho\gamma(m-K)}{\sigma-m'+y}\right)^{۲}}{۲(۱-\rho^{۲})\gamma^{۲}-\frac{(m-K)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}\right\}\\&=\frac{\exp\left\{-\frac{(m-K)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right\}}{۲\pi\sigma\gamma\sqrt{۱-\rho^{۲}}}\ \exp\left\{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{\rho\gamma(m-K)-\sigma m'}{\sigma\gamma\sqrt{۱-\rho^{۲}}}+\frac{y}{\gamma\sqrt{۱-\rho^{۲}}}\right)^{۲}\right\}.\end{aligned}$$

از این فرمول و محاسبات جبری ساده، برهان لم بالا نتیجه خواهد شد. برای این‌که بتوانیم عمل انتگرال‌گیری را که در لم بالا دیده می‌شود اجرا کنیم، توجه می‌کنیم که

$$\Phi(x) = \frac{۱}{۲} + \frac{\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{۲}}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

که در آن، مانند معمول،

$$\mathrm{erf}(x) = \int_{۰}^{x} \exp(-t^{۲})dt.$$

حال با قرار دادن $\Delta^{۲} = \sigma^{۲}\gamma^{۲} - \lambda^{۲}$ می‌توان محاسبه‌ی بیش‌تری در نتیجه‌ی لم ۱ به‌صورت زیر انجام داد:

$$\begin{aligned} EN_K(\alpha,\beta) \; = \; & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Delta}{\pi\sigma^{۲}} \exp\left\{-\frac{(m-K)^{۲}\gamma^{۲} + (m')^{۲}\sigma^{۲} - ۲(m-K)m'\lambda}{۲\Delta^{۲}}\right\} \\ & + \frac{\sqrt{۲}\,|m'\sigma^{۲} - \lambda(m-K)|}{\pi\sigma^{۳}} \exp\left\{-\frac{(m-K)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right\} \\ & \times \mathrm{erf}\left\{\frac{|m'\sigma^{۲} - \lambda(m-K)|}{\sqrt{۲}\sigma\Delta}\right\} dt. \end{aligned} \tag{۳}$$

اوّلین جمله‌ای که در سمت راست فرمول (۳) ظاهر می‌شود، به‌طور کلّی یک انتگرال‌گیری ساده را به وجود خواهد آورد که می‌توان آن را برای همه‌ی انواع چندجمله‌ای‌های بالا براورد کرد. انتگرال دوم در رابطه‌ی (۳) را که در واقع به شکل انتگرال دوگانه است نمی‌توان به‌آسانی براورد کرد؛ ولی این جمله برای هر سه رده از چندجمله‌ای‌های بالا کوچک است و هیچ سهمی در EN_K ندارد. بنا بر این، فقط به یک براورد بالایی برای این بخش از رابطه‌ی (۳) نیاز داریم. برای این منظور، نخست توجه می‌کنیم که بنا بر تعریف، $\mathrm{erf}(\cdot)$ به‌وسیله‌ی $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ کراندار است. همچنین چون

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m-K}{\sigma}\right) = \frac{m'\sigma^{۲} - \lambda(m-K)}{\sigma^{۳}},$$

بدون محاسبه‌ی شکلی بسته برای m، m'، $\sigma^{۲}$ و λ، می‌توان یک حد بالا برای انتگرال‌گیری دوم در رابطه‌ی (۳) براورد کرد. در واقع، تحلیل ویژه برای هر رده از چندجمله‌ای‌ها متفاوت خواهد بود و ما برای پرهیز از تکرار، جزئیات برهان را حذف می‌کنیم. در عوض در آنچه در پی خواهد آمد، چندجمله‌ای‌های مختلف را در رده‌های مختلف بر حسب رفتار آن‌ها تفکیک می‌کنیم.

۳ رده‌بندی‌ها

حال می‌توان از رابطه‌ی (۳) برای به دست آوردن نتیجه برای EN_K برای هر رده از چندجمله‌ای‌های تصادفیِ بالا استفاده کرد. در واقع، مقدار مشخصه‌های مورد نیاز در رابطه‌ی (۳) در هر مورد به‌طور قابل توجهی متفاوت است. این تفاوت‌ها را بعداً مورد تأکید قرار می‌دهیم. تفاوت‌های بارزی که برای رده‌های چندجمله‌ای‌های تصادفی روی می‌دهد به شرح زیرند:

- **چندجمله‌ای‌های جبری تصادفی**

دانسته‌ها در باره‌ی این نوع چندجمله‌ای‌ها بیش‌تر است. این چندجمله‌ای‌ها با فرض $\psi_j(x) \equiv x^j$ در رابطه‌ی (۱) تعریف می‌شوند، که رابطه‌ی زیر را به دست می‌دهد:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(\omega) x^j.$$

برای این رده از چندجمله‌ای‌ها تعداد $O(\log n)$ صفرهای حقیقی وجود دارد. تعداد مورد انتظار گذرها از سطح K با افزایش مقدار $K \equiv K_n$ کاهش می‌یابد. برای حالت $E(a_j(\omega)) \neq 0$ تعداد مورد انتظار صفرهای حقیقی یا گذرها از سطح K در مقایسه با حالت $E(a_j(\omega)) = 0$ تا نصف کاهش پیدا می‌کند. همچنین تعداد ماکسیمم‌ها و مینیمم‌ها به‌مراتب بیش‌تر از صفرهای حقیقی است. بنا بر این، برای خم‌هایی که نمایش چندجمله‌ای‌های جبری تصادفی هستند، تعداد قابل توجهی نوسان وجود دارد که بین دو گذر از صفر روی نمی‌دهد. این خم‌ها یا کاملاً بالای محور xها قرار دارند یا کاملاً زیر آن.

- **چندجمله‌ای‌های مثلثاتی تصادفی**

تحلیل مربوط به این نوع چندجمله‌ای‌ها پیچیده‌تر از حالت جبری است و بنا بر این، دانسته‌ها در باره‌ی رفتار آن‌ها کم است. در رابطه‌ی (۱) فرض کنید $\psi_j(x) \equiv \cos jx$. در این صورت، چندجمله‌ای‌های مثلثاتیِ تصادفی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$P_n(x, \omega) = \sum_{j=0}^{n} a_j(\omega) \cos jx.$$

این کار، که آغازگرِ آن دانج [۴] بود، در واقع به‌جای تعداد مورد انتظارِ صفرها، تعداد صفرهای حقیقی را به دست می‌دهد. این را می‌توان نتیجه‌ای قوی‌تر تلقّی کرد. این رده از چندجمله‌ای‌ها دارای $O(n)$ صفر است. این تعداد، بر خلاف حالت جبری، برای حالت‌های گذرها از سطح K و حالت

$E(a_j(\omega)) \neq ۰$ پابرجا می‌ماند. باز هم بر خلاف چندجمله‌ای‌های جبری، به‌طور مجانبی، به همان اندازه که صفر هست، ماکسیمم و مینیمم وجود دارد. بنا بر این، همه‌ی نوسان‌های خم که نمایش چندجمله‌ای هستند مجانباً بین دو گذر از صفر قرار دارند. به‌طور کلّی، صفرها برای این حالت، یکنواخت‌تر توزیع می‌شوند؛ در حالی که برای حالت جبری، در اطراف نقطه‌هایی خاص متمرکزترند.

- **چندجمله‌ای‌های تصادفی با عناصر دوجمله‌ای**

برای معرفی این چندجمله‌ای‌ها دو راه وجود دارد. در رابطه‌ی (۱) فرض کنید $\psi_j(x) \equiv \binom{n}{j}^{\frac{1}{۲}} x^j$. این به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$P_n(x,\omega) = \sum_{j=۰}^{n} a_j(\omega) \binom{n}{j}^{\frac{1}{۲}} x^j,$$

که در آن، $a_j(\omega)$ها هم‌توزیع باقی می‌مانند. تا آن‌جا که به تحلیل مربوط است، وضعیت همان‌گونه است که در $\sum_{j=۰}^{n} a_j(\omega) x^j$ ضریب‌ها را ناهم‌توزیع فرض کنیم با $\mathrm{var}(a_j(\omega)) = \binom{n}{j}$، با مقداری متناظر برای $E(a_j(\omega))$. مطالعه‌ی این نوع چندجمله‌ای‌ها به وسیله‌ی ادلمن و کوستلان در [۵] مطرح شده است و همان‌گونه که رامپونی [۹] یادآور می‌شود، جذابیت‌های بسیاری در فیزیک دارد. ولی از آن‌جا که معلوم شده است که خواص آن‌ها با رده‌های چندجمله‌ای‌های بالا تفاوت دارد، مسئله‌های باز بسیاری موجود است. تعداد مورد انتظار صفرهای حقیقی، مجانباً $O(\sqrt{n})$ است که برابر با تعداد گذرها از سطح Kی آن‌ها و نیز تعداد ماکسیمم‌ها و مینیمم‌های آن‌ها است. حالت $E(a_j(\omega)) \neq ۰$ هنوز معلوم نشده است.

نتایج بالا به‌طور عمده از کاربرد فرمول‌های کاک-رایس حاصل از رابطه‌ی (۳) به دست می‌آیند. برای این منظور لازم است گشتاورهای چندجمله‌ای‌ها و مشتق‌های آن‌ها را براورد کنیم. در زیر، مشخصه‌های مورد نیاز در رابطه‌ی (۳) را ارائه می‌کنیم.

۴ گشتاورها

برای سهولت، فرض می‌کنیم $E(a_j(\omega)) = ۰$، و روی واریانس‌ها تمرکز می‌کنیم. هر حالت را به‌ترتیب با اندیس‌های A و T و B برای هر یک از رده‌های بالا مشخص می‌کنیم. به‌آسانی می‌توان نشان داد که

$$
\begin{aligned}
\sigma_A^2 &= \sum_{j=0}^{n} x^{2j} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2},\\
\sigma_T^2 &= \sum_{j=0}^{n} \cos^2 jx = \frac{n}{2} + \frac{\sin(2n+1)x}{4\sin x} + \frac{3}{4},\\
\sigma_B^2 &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{2j} = (x^2+1)^n,\\
\gamma_A^2 &= \sum_{j=0}^{n} j^2 x^{2j-2}\\
&= \Big\{ -x^{2n+4} - x^{2n+2} + x^2 + 1 - (n+1)^2 x^{2n+4} + 2(n+1)^2 x^{2n+2}\\
&\quad - (n+1)^2 x^{2n} + 2(n+1)x^{2n+4} - 2(n+1)x^{2n+2} \Big\} (1-x^2)^{-3},\\
\gamma_T^2 &= \sum_{j=0}^{n} j^2 \sin^2 jx = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{-(2n+1)^2 \sin(2n+1)x}{8\sin x}\\
&\quad - \frac{(2n+1)\cos x \cos(2n+1)x}{8\sin^2 x} - \cot x \frac{(2n+1)\cos(2n+1)x}{8\sin x}\\
&\quad - \frac{\cot^2 x \sin(2n+1)x}{8\sin x} + \frac{\sin(2n+1)x}{8\sin x \cos^2 x},\\
\gamma_B^2 &= \sum_{j=0}^{n} j^2 \binom{n}{j} x^{2j-2} = n(x^2+1)^{n-2}\{(n+1)x^2 - x^2 + 1\},\\
\lambda_A &= \sum_{j=0}^{n} j x^{2j-1} = \frac{x(1-x^{2n+2})}{(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)x^{2n+1}}{1-x^2},\\
\lambda_T &= \frac{\cos x \sin(2n+1)x}{8\sin^2 x} - \frac{(2n+1)\cos(2n+1)x}{8\sin x},
\end{aligned}
$$

و سرانجام

$$
\lambda_B = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} x^{2j-1} = nx(x^2+1)^{n-1}.
$$

موفقیت یا عدم موفقیت در به دست آوردن نتایج برای هر یک از رده‌های بالا، بستگی دارد به این‌که چگونه می‌توان مقداری برای هر یک از مشخصه‌های بالا براورد کرد، و نیز به این‌که قادر به اجرای انتگرال‌گیری برای جمله‌ی اوّل رابطه‌ی (۳) باشیم. مثلاً، همان طور که در بالا اشاره شد حالت $E(a_j(\omega)) \neq 0$

برای چندجمله‌ای‌های دارای عناصر دوجمله‌ای هنوز معلوم نیست. علت آن در مشکلاتِ ناشی از براورد عبارت‌ها در شکل $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^{\frac{1}{2}} x^j$ است.

اگرچه میانگین و واریانس ضریب‌ها بر تعداد مورد انتظار صفرها و گذرها از سطح اثر می‌گذارند، توزیع ضریب‌ها اثر بسیار کم‌تری دارد. مثلاً، برای رده‌ی چندجمله‌ای‌های جبری تصادفی، تا زمانی که ضریب‌ها به حوزه‌ی ربایش توزیع نرمال با میانگین‌های صفر تعلق داشته باشند، نتایج ناوردا هستند و از تعداد صفرهای حقیقی برای ضریب‌های دارای توزیع کوشی، اندکی بزرگ‌ترند. ولی این افزایش همچنان در محدوده‌ی $O(\log n)$ است.

شکلی تعدیل‌یافته از رابطه‌ی (۳) را می‌توان برای یافتن ماهیت و هندسه‌ی گذرهای یک چندجمله‌ای تصادفی از محور xها یا سطح K مورد استفاده قرار داد. در شمارش تعداد گذرها، گذرها از u با شیب بیش‌تر از $u > 0$، یا پایین‌گذرهای با شیب کمتر از $-u$ را در نظر می‌گیریم. جالب است توجه شود که برای مستثنا کردن هر تعداد قابل توجه از گذرها لازم است فرض کنیم که u بزرگ است، یعنی $u \to \infty$. این مثلاً در مورد رده‌ی چندجمله‌ای‌های جبری تصادفی نشان می‌دهد که اکثر گذرها از صفر، بر محور xها عمودند. در بخش زیر به ریشه‌های مختلط چندجمله‌ای و خواص آن‌ها می‌پردازیم.

۵ ریشه‌های مختلط

مطالعه‌ی ریشه‌های مختلط، بُعد دیگری به مسئله اضافه خواهد کرد. فرض می‌کنیم چندجمله‌ای‌های بالا ضریب‌های تصادفی مختلط با جزءهای حقیقی و انگاری تصادفی دارند. به‌دلایل واضح، برای حالت ضریب‌های مختلط، هیچ فرمول مجانبی مشابهی برای تعداد مورد انتظار صفرهای حقیقی نمی‌تواند وجود داشته باشد. در عوض، چگالی ریشه‌ها(ی مختلط)، مورد توجه است. ما فقط چندجمله‌ای‌های جبری را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش مورد استفاده را می‌توان به‌آسانی برای دیگر رده‌های چندجمله‌ای‌ها تعدیل کرد. فرض کنید

$$P_n(z) \equiv P(z) = \sum_{j=0}^{n} \eta_j(\omega) z^j,$$

که در آن $\eta_j(\omega) = a_j(\omega) + ib_j(\omega)$ است و $a_j(\omega)$ و $b_j(\omega)$ روی $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ تعریف شده‌اند. $\nu_{\mathbf{K}}^n(\Phi)$ را به‌عنوان تعداد ریشه‌های مختلط در Φ از $P(z) = \mathbf{K}$، $z \in \mathbf{C}$ و $\mathbf{K} = K_1 + iK_2$ در نظر

بگیرید. از [۱۱] معلوم است که تابع چگالی $h^n_{\mathbf{K}}(z)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E\nu^n_{\mathbf{K}}(\Phi) = \int_{\Phi} h^n_{\mathbf{K}}(z) \tag{۴}$$

فرض کنید

$$X^n_1 = \sum_{j=0}^{n}\{a_j(\omega)\cos j\theta - b_j(\omega)\sin j\theta\}r^j$$

و

$$X^n_2 = \sum_{j=0}^{n}\{a_j(\omega)\sin j\theta + b_j(\omega)\cos j\theta\}r^j,$$

که در آن $z = r^{i\theta}$. پس واضح است که $\mathbf{X} = (X^n_1, X^n_2)^{\mathrm{T}}$ بردار تصادفی جزء‌های حقیقی و انگاری $P(z)$ است. همچنین فرض کنید $p_{r,\theta}(x,y) \equiv p(x,y)$ نشان‌دهنده‌ی تابع چگالی توأم دوبعدی $\mathbf{X}$ است. حال با استفاده از نتیجه‌ی منسوب به آدلر [۱، ص ۹۵] یا [۷]، تابع چگالی $h^n_{\mathbf{K}}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} h^n_{\mathbf{K}}(z) &= E(|\det J|\ |X^n_1 = K_1, X^n_2 = K_2)\ p(K_1, K_2) \\ &= E(|\det J|\ |\mathbf{X} = \mathbf{K})\ p(\mathbf{K}), \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن، J ماتریس مشتق جزئی مرتبه‌ی اوّل $\mathbf{X}$ نسبت به r و θ است. این ماتریس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \theta} & \frac{\partial X_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

محاسبه‌ی دترمینان مورد نیاز در رابطه‌ی (۵) آسان است؛ به‌این صورت که

$$\begin{aligned} \det J &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} jkr^{j+k-1}\Big\{(a_j(\omega)a_k(\omega) + b_j(\omega)b_k(\omega))\cos(j-k)\theta \\ &\quad + 2a_j(\omega)b_k(\omega)\sin(j-k)\theta\Big\}. \end{aligned}$$

بنا بر این، مسئله به‌صورتِ به دست آوردن بردارهای امیدهای ریاضی شرطی و ماتریس‌های واریانس و کوواریانس $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساده می‌شود. از تحلیل چندمتغیره‌ی استاندارد معلوم است که

$$\operatorname{cov}\left(\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{array} \middle| \mathbf{X} = \mathbf{K} \right) = \begin{pmatrix} \Pi_{\mathbf{aa.X}} & \Pi_{\mathbf{ab.X}} \\ \Pi_{\mathbf{ba.X}} & \Pi_{\mathbf{bb.X}} \end{pmatrix},$$

که در آن

$$\Pi_{\mathbf{ab.X}} = \Pi_{\mathbf{ab}} - \Pi_{\mathbf{aX}}\Pi_{\mathbf{XX}}^{-1}\Pi_{\mathbf{Xb}}$$

و

$$\Pi_{\mathbf{ab}} = E\{\mathbf{a} - E(\mathbf{a})\}\{\mathbf{b} - E(\mathbf{b})\}^{\mathrm{T}}.$$

به این ترتیب، پس از مقداری محاسبه، کوواریانس‌های مورد نیاز و در نتیجه چگالی ریشه‌های مختلط که در رابطه‌ی (۵) داده شده است به دست می‌آید.

مرجع‌ها

[1] Adler, R.J. (1981). *The Geometry of Random Fields.* Wiley, New York.

[2] Bharucha-Reid, A.T.; Sambandham, M. (1986). *Random Polynomials.* Academic Press, New York.

[3] Cramér, H.; Leadbetter, M.R. (1967) *Stationary and Related Stochastic Processes.* Wiley, New York.

[4] Dunnage, J.E.A. (1966). The number of real zeros of a random trigonometric polynomial. *Proc. London Math. Soc.* **16**, 53–84.

[5] Edelman, A.; Kostlan, E. (1995). How many zeros of a random polynomial are real? *Bull. Amer. Math. Soc.* **32**, 1–37.

[6] Farahmand, K. (1998). *Topics in Random Polynomials.* Addison Wesley Longman, London.

[7] Ibragimov, I.A.; Zeitouni, O. (1997). On roots of random polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **349**, 2427–2441.

[8] Kac, M. (1943). On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.* **49**, 314-320.

[9] Ramponi, A. (1999). A note on the complex roots of complex random polynomials. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 181–187.

[10] Rice, S.O. (1945). Mathematical theory of random noise. *Bell. System Tech. J.* **25**, 46-156. Reprinted in: Selected Papers on Noise And Stochastic Processes, N. Wax, ed. Dover, NY, 1954, pp. 133-294.

[11] Shepp, L.A.; Vanderbei, R.J (1995). The complex zeros of random polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **347**, 4365–4383.

دریافت: ۱۸ فروردین ۱۳۸۳
ترجمه: ۲۲ اردیبهشت ۱۳۸۳
ویرایش: ۸ شهریور ۱۳۸۳
آخرین اصلاح: ۸ شهریور ۱۳۸۳
انتشار:

Kambiz Farahmand

Department of Mathematics,
University of Ulster at Jordanstown, Co. Antrim, BT37 0QB,
United Kingdom.
e-mail: *k.farahmand@ulst.ac.uk*