

مفهوم زیراستقلال و کاربرد آن در آمار و احتمال

غلامحسین قراگزلو همدانی

دانشگاه مارکت

چکیده. بسیاری از قضیه‌های حدّی و همگرایی و مشخص‌سازی توزیع‌ها در احتمال و آمار ریاضی، به‌ویژه آن‌هایی که مربوط به توزیع نرمال هستند، براساس فرض استقلال دو یا چند متغیر تصادفی بنا شده‌اند. با این حال در اثبات این قضیه‌ها اغلب از قدرت کامل استقلال استفاده نمی‌شود؛ زیرا آنچه مورد نیاز است توزیع حاصل جمع متغیرهای تصادفی است، نه توزیع مشترک آن‌ها. در این مقاله مفهومی را دوباره معرفی می‌کنیم که نسبت به استقلال، کاملاً ضعیف است و در اکثر قضیه‌های اشاره شده در بالا می‌تواند جانشین مفهوم استقلال شود. یک مفهوم نسبتاً جدید دیگر نیز مورد اشاره قرار خواهد گرفت و برخی از نتایج مربوط نیز تشریح خواهد شد. © ۱۳۸۳ پژوهشکده‌ی آمار. همه‌ی حقوق محفوظ است.

واژگان کلیدی. متغیرهای تصادفی زیرمستقل؛ متغیرهای تصادفی معکوس؛ مشخص‌سازی توزیع‌ها.

۱ مقدمه

بسیاری از قضیه‌های حدّی و همگرایی در آمار ریاضی و قضیه‌های مشخص‌سازی توزیع‌ها، به‌ویژه آن‌هایی که مربوط به توزیع نرمال می‌شوند، براساس این‌که دو متغیر یا بیش‌تر از دو متغیر تصادفی مستقل هستند، پایه‌گذاری شده‌اند. اما در اثبات این قضیه‌ها اغلب از قدرت کامل استقلال استفاده نمی‌شود؛ زیرا معمولاً توزیع حاصل جمع متغیرهای تصادفی مورد احتیاج است، نه توزیع مشترک آن‌ها، که البته در حالت استقلال، برابر با حاصل ضرب توزیع‌های حاشیه‌ای است.

در بسیاری از مسائل عملی، به‌ویژه در مهندسی، با حالت‌هایی مواجه می‌شویم که در آن‌ها، توزیع‌های حاشیه‌ای و بعضی از گشتاورهای مرکب متغیرهای تصادفی مورد نظر را می‌توان معلوم پنداشت. از

اطلاعات موجود به این نتیجه می‌رسیم که متغیرهای تصادفی ما «مستقل» نیستند، ولی به یقین (حد اقل) «ناهمبسته» هستند. از آنجایی که به توزیع حاصل جمع متغیرهای تصادفی احتیاج داریم و در قریب به اتفاق کتاب‌ها، قضیه‌های مربوط به توزیع حاصل جمع چند متغیر تصادفی بر اساس فرض «مستقل بودن متغیرها» بیان شده‌اند، به نظر می‌آید که به بن‌بست برخوردیم.

بنا بر این، منطقی به نظر می‌رسد که بررسی کنیم آیا می‌توان قضیه‌های مهم آمار و احتمال را که بر پایه‌ی استقلال متغیرهای تصادفی بیان شده‌اند و برای به دست آوردن توزیع‌های حاصل جمع متغیرهای تصادفی به کار می‌روند، بر اساس مفهومی ضعیف‌تر از استقلال ثابت کرد. این امر به‌طور آشکار سبب توسعه‌ی دامنه‌ی کاربردی این قضیه‌ها خواهد شد.

هدف این مقاله آن است که چنین مفهومی را دوباره معرفی کند و یک بررسی کامل از کارهایی که بر اساس این مفهوم جدید از زمان پیدایش آن تا کنون انجام گرفته است، ارائه دهد. برای آن‌که این مقاله مورد استفاده‌ی افراد بیش‌تری قرارگیرد، نتایج به دست آمده در مقاله‌های مختلف را در این‌جا جمع‌آوری و بدون اثبات ارائه می‌کنیم. سعی بر آن داریم که آن را خودکفا کنیم و همه‌ی نتایج موجود مربوط به این مفهوم جدید را یکجا در اختیار خواننده قرار دهیم.

تا آنجایی که ما اطلاع داریم، مفهوم «زیراستقلال» (sub-independence) را برای نخستین بار، دورایراجان [۷] معرفی کرد و تعریف زیر را برای حالت دو متغیر تصادفی ارائه نمود:

تعریف ۱ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی، به ترتیب با توابع مشخصه‌ی توأم و حاشیه‌ای $\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)$ ، $\varphi_X(t_1)$ ، $\varphi_Y(t_2)$ باشند. متغیرهای تصادفی X و Y را «زیرمستقل» نامند اگر

$$(۱) \quad \varphi_{X,Y}(t, t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

واضح است که X و Y اگر مستقل باشند، زیرمستقل هم هستند، و اگر زیرمستقل باشند، ناهمبسته هم می‌باشند (به شرط متناهی بودن امیدهای ریاضی)؛ ولی عکس آن صادق نیست.

مفهوم زیراستقلال، همان‌طوری که در [۷] به آن اشاره شده است، به نظر مهم می‌آید؛ زیرا تحت فرض‌های معمول، قانون قوی اعداد بزرگ خین‌چین^۱ (Khintchine) و قضیه‌ی حدی مرکزی لیندبرگ-له‌وی^۲ (Lindeburg-Levy) برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی زیرمستقل برقرارند. بنا بر این، جای تعجب نیست که انسان کنج‌کاو شود و سعی بر آن داشته باشد که شرایطی پیدا کند که تحت آن، مفهوم زیراستقلال، مفهوم استقلال را نتیجه دهد؛ زیرا این بررسی نشان خواهد داد که مفهوم زیراستقلال تا چه اندازه‌ای می‌تواند مؤثر و مفید باشد. دورایراجان این مسئله را در مقاله‌ی خود [۷] مطرح کرد و گزاره‌ای بیان نمود که در آن شرایطی قید کرد و تحت آن شرایط نشان داد که مفهوم زیراستقلال، مفهوم استقلال را نتیجه می‌دهد. همین گزاره سبب شد که او تفاوت و درجه‌ی ضعف زیراستقلال در مقایسه با استقلال را به‌طور کامل درک نکند.

برای نویسنده‌ی مقاله‌ی حاضر، همواره این سؤال مطرح بود که آیا مفهومی وجود دارد که بین «ناهمبستگی» و «استقلال» باشد؛ زیرا بارها با مسائلی روبه‌رو شده بودیم که در آن‌ها متغیرهای تصادفی نامستقل ولی ضمناً ناهمبسته بودند و در عین حال به‌نظر می‌رسید که رابطه‌ای قوی‌تر از «ناهمبسته بودن» بین آن‌ها وجود دارد (به [۱۲] مراجعه کنید). بنا بر این، وقتی در سال ۱۹۸۲ میلادی عنوان مقاله‌ی دورایرجان را دیدم بسیار کنجکاو شدم؛ چون همواره انتظار مفهوم جدیدی را داشتم. پس از مطالعه‌ی مقاله‌ی ایشان و گزاره‌ای که در بالا به آن اشاره شد، معلوم گردید که دورایرجان اشتباه کرده و گزاره نادرست است؛ به این معنی که تحت شرایط قید شده، یکی از متغیرهای تصادفی فقط می‌تواند مقدار صفر را با احتمال ۱ قبول کند. بنا بر این، سؤال مطرح شده در بالا در حالت کلی بدون جواب است. این، مقدمه‌ی آشنایی ما با این مفهوم جدید بود، که نتیجه‌ی آن، مقاله‌ی [۸] می‌باشد. شایان ذکر است که همان گزاره‌ی نادرست سبب شده بود که دورایرجان به اهمیت مفهوم زیراستقلال به‌درستی پی نبرد و در نتیجه بررسی‌های بعدی در این زمینه را به‌طور جدی دنبال نکند.

سوی نویسنده‌ی این مقاله و همکارانی که با آن‌ها مقاله‌های مشترک در این زمینه دارم، فقط سه همکار ایرانی اخیراً در مقاله‌های خود از مفهوم زیراستقلال استفاده کرده‌اند: حمید بازرگان [۳]، اصغر سیف و عادل محمدپور [۱۹]، و عادل محمدپور [۱۷]. امید است با توجه بیش‌تری که اخیراً به این مفهوم شده، و با آشنایی بیش‌تر خوانندگان با آن، دامنه‌ی کاربردی آن گسترش پیدا کند و از شناختی که سزاوار آن است برخوردار گردد.

در بخش ۲، راجع به نتایجی صحبت می‌کنیم که مربوط به دو متغیر تصادفی زیرمستقل است. در بخش ۳، قضیه‌های مشخص‌سازی بعضی از توزیع‌ها را ارائه می‌کنیم که بر اساس مفهوم زیراستقلال دو متغیر تصادفی، بیان شده‌اند. در این بخش، مفهوم دیگری را دوباره معرفی می‌کنیم که امکان دارد بعضی از خوانندگان، اطلاعی از آن نداشته باشند. این مفهوم به نام «متغیرهای تصادفی معکوس» (reciprocal) معروف است. در بخش ۴، دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از متغیرهای تصادفی زیرمستقل را در نظر می‌گیریم و نتایجی در مورد آن‌ها ارائه می‌کنیم. در بخش ۵، دو قضیه بیان می‌کنیم که مشخص‌سازی توزیع نرمال بر اساس مفهوم زیراستقلال برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی‌اند. سرانجام در بخش ۶، مسئله‌ای مطرح می‌کنیم که برای آن جایزه‌ای نقدی منظور کرده‌ام. امید است جوابی برای این مسئله پیدا شود، که به نظر می‌آید اثر جالبی بر قضیه‌ها و نظریه‌های آمار و احتمال داشته باشد.

حالت دو متغیر تصادفی

برای آن که مسئله‌ی تابع توزیع حاصل جمع دو متغیر تصادفی را دنبال کنیم، ترجیح می‌دهیم که تعریفی دیگر، البته معادل تعریف قبلی، برای زیراستقلال ارائه کنیم، که به نظر طبیعی‌تر می‌رسد.

تعریف ۲ متغیرهای X و Y را زیرمستقل نامند اگر تابع توزیع $X + Y$ برابر با تابع پیچش توابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها باشد؛ یعنی

$$F_{X+Y}(t) = F_X * F_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-s) dF_Y(s), \quad t \in \mathbb{R}$$

تذکر ۱ مثال زیر نشان می‌دهد که مفهوم زیراستقلال، ضعیف‌تر از مفهوم استقلال است.

مثال ۱ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی جدا با توزیع یکسان و با بُرد $\{1, 2, 3\}$ باشند، که احتمال‌های توأم آن‌ها عبارت‌اند از:

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = \frac{1}{9}, \quad p_{21} = p_{32} = p_{13} = \frac{2}{9}, \quad p_{12} = p_{23} = p_{31} = 0$$

همان‌طوری که ملاحظه می‌کنید، X و Y زیرمستقل هستند، ولی مستقل نیستند.

تذکر ۲ مفهوم زیراستقلال از مفهوم ناهمبستگی قوی‌تر است. این نتیجه را از تعریف ۱ که در این جا آن را به صورت گزاره‌ای ارائه می‌کنیم تا معادل بودن آن با تعریف ۲ را نشان دهیم، به آسانی می‌توان مشاهده کرد.

گزاره‌ی ۱ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توابع مشخصه‌ی φ_X و φ_Y تابع مشخصه‌ی توأم $\varphi_{X,Y}$ باشند. در این صورت، رابطه‌ی (۱) برقرار است اگر و فقط اگر X و Y (بنا به تعریف ۲) زیرمستقل باشند.

تذکر ۳ اگر متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل باشند، بر خلاف حالت استقلال، X و αY برای $\alpha \neq 1$ ممکن است زیرمستقل نباشند. مثلاً اگر $\alpha = -1$ ، مثال ۱ نشان می‌دهد که X و $-Y$ زیرمستقل نیستند. حتی اگر X و Y متغیرهای تصادفی نرمال و زیرمستقل باشند، لازم نیست که X و $-Y$ زیرمستقل باشند. به هر حال، مفهوم زیراستقلال، بسیار ضعیف‌تر از مفهوم استقلال است. به مثال زیر توجه کنید [۱۴].

مثال ۲ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع مشخصه‌ی توأم زیر باشند:

$$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = \exp \left\{ -\frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \right\} \left[1 + k t_1 t_2 (t_1 - t_2)^2 \exp \left\{ \frac{t_1^2 + t_2^2}{4} \right\} \right],$$

که در آن $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ ، و k ثابتی مناسب است. (چگالی توأم آن‌ها عبارت است از:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2} \right\} \left[1 - \sqrt{e} k p(x, y) \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2} \right\} \right],$$

که در آن، $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، و $p(x, y) = \{exy - 2x^2 - 2y^2 + 4x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3 + 1\}$ ، در این صورت، X و Y متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد و زیرمستقل هستند. به علاوه، $X + Y$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۲ است؛ ولی X و $-Y$ زیرمستقل نیستند و $X - Y$ دارای توزیع نرمال نیست. آیا این کمی تعجب‌آور نیست؟

تذکره ۴ همانند حالت مستقل، ترکیب‌های خطی متغیرهای تصادفی زیرمستقل لازم نیست که زیرمستقل باشند. اما اگر متغیرهای تصادفی دارای توزیع نرمال باشند، گزاره‌ی زیر که از [۱۴] گرفته شده، برقرار است.

گزاره‌ی ۲ فرض کنید X و Y و همچنین X و $-Y$ متغیرهای تصادفی نرمال زیرمستقل با واریانس‌های مساوی باشند. در این صورت، $X + Y$ و $X - Y$ زیرمستقل‌اند.

مثال ۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع مشخصه‌ی توأم زیر باشند:

$$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = \exp \left\{ -\frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \right\} \left[1 + k t_1 t_2 (t_1^2 - t_2^2) \exp \left\{ \frac{t_1^2 + t_2^2}{4} \right\} \right],$$

که در آن $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ ، و k ثابتی مناسب است. (توجه کنید که این مثال و مثال ۲ متفاوت‌اند.) همان‌طوری که ملاحظه می‌کنید، متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل و دارای توزیع نرمال استانداردند. به علاوه، X و $-Y$ متغیرهای تصادفی زیرمستقل‌اند و بنا بر گزاره‌ی ۲، $X + Y$ و $X - Y$ متغیرهای تصادفی زیرمستقل، و در این مثال، دارای توزیع یکسان نرمال با میانگین صفر و واریانس ۲ می‌باشند.

تذکره ۵ اگرچه در بسیاری از حالت‌ها، مفهوم زیراستقلال می‌تواند جایگزین مفهوم استقلال گردد، پیدا کردن شرایطی که تحت آن، در حالت کلی، مفهوم زیراستقلال، مفهوم استقلال را نتیجه دهد، بسیار مشکل است. حتا در حالت دو متغیر تصادفی جدا با توزیع یکسان، توزیع توأم ممکن است شکل‌های مختلفی را قبول کند که با مفهوم زیراستقلال سازگارند.

دقت کنید، برای آن‌که متغیرهای تصادفی جدا با توزیع یکسان، زیرمستقل باشند، احتمال‌های

$$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

و

$$q_{ij} = P(X = x_i, Y = x_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

باید شرایط زیر را برقرار کنند:

$$\sum_i \sum_j (q_{ij} - p_i p_j) = 0 \quad (\text{آ})$$

که در آن، جمع‌بندی روی همه‌ی (i, j) ‌هایی است که برای آن‌ها $x_i + x_j = z$ و همه‌ی مقادیر در مجموعه‌ی

$$\{\min(x_i + x_j), \dots, \max(x_i + x_j)\}$$

را قبول می‌کند؛

$$p_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} = \sum_{j=1}^n q_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{ب})$$

این سیستم‌های خطی از n^2 متغیر q_{ij} ، به‌جز برای تعداد کمی از مقادیر n ، به‌طور قابل ملاحظه‌ای غیر قابل تعیین هستند؛ به‌ویژه اگر تعدادی به‌نسبت بزرگ از نقاط (x_i, x_j) روی خط $x + y = z$ قرار داشته باشند. از طرف دیگر، تنها q_{ij} ‌های سازگار با مفهوم استقلال، عبارت‌اند از:

$$q_{ij} = p_i p_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

در حالت خاص زیر، مفهوم زیراستقلال، مفهوم استقلال را نتیجه می‌دهد: اگر متغیرهای تصادفی X و Y ناهمبسته و دارای توزیع نرمال باشند، به‌طوری که $a_k X$ و $b_k Y$ برای $k = 1, 2, \dots$ زیرمستقل باشند و $\{(a_k, b_k) : k = 1, 2, \dots\}$ «دنباله‌ای متمایز»^۲ (distinct sequence) در $\mathbb{R}^2$ ، آن‌گاه X و Y مستقل‌اند.

۳ مشخص‌سازی بعضی از توزیع‌ها بر اساس دو متغیر تصادفی

ابتدا دو مشخص‌سازی توزیع نرمال را ارائه می‌کنیم که بر اساس مفهوم زیراستقلال بیان شده‌اند و به‌طور آشکاری از نتایج مشابه بر اساس مفهوم استقلال [۵] قوی‌تر می‌باشند.

گزاره‌ی ۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل با توزیع یکسان و با میانگین صفر و واریانس ۱ باشند، به‌طوری که

$$X \text{ و } -Y \text{ زیرمستقل باشند,} \quad (\text{آ})$$

$$X + Y \text{ و } X - Y \text{ زیرمستقل باشند.} \quad (\text{ب})$$

در این صورت، X و Y دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشند [۱۴].

تذکره ۶ توجه کنید که از فرض‌های گزاره‌ی ۳ نتیجه نمی‌شود که X و Y مستقل‌اند [۱۲]، قضیه‌ی [۱] و همچنین نتیجه نمی‌شود که دارای توزیع توأم نرمال هستند. گزاره‌ی ۳، از دیدگاه هدف، به قضیه‌ی ماکسول-کاک-برشتاین (Maxwell-Kac-Berstein) نزدیک است.

تذکره ۷ قضیه‌ی اول کرامر [۶] می‌گوید که اگر حاصل جمع دو متغیر تصادفی مستقل، دارای توزیع نرمال باشد، هر یک از متغیرهای تصادفی نیز دارای توزیع نرمال خواهد بود. نویسندگی این مقاله بعد از چند هفته بررسی، نوع زیراستقلال قضیه‌ی کرامر را از اثبات لوکاس [۱۶]، که برای حالت استقلال داده بود، نتیجه‌گیری کرد. اثبات کرامر و اثبات لوکاس، هر دو بر اساس یک لم پایه‌گذاری شده‌اند. این لم نشان می‌دهد که تابع مشخصه‌ی هر یک از متغیرهای تصادفی، تابع تام (entire) است. اگر فرض رابطه‌ی بین دو متغیر تصادفی را به اندازه‌ی قابل ملاحظه‌ای ضعیف‌تر کنیم، تا اندازه‌ای تعجب‌آور است که این لم هنوز به قوت خود باقی است [۱۴]، قضیه‌ی [۱۳].

گزاره‌ی ۴ اگر متغیرهای تصادفی X و Y هم‌توزیع و با میانگین صفر باشند، و اگر X و $-Y$ زیرمستقل و $\frac{1}{2}(X - Y)^2$ دارای توزیع خی‌دو با درجه‌ی آزادی ۱ باشد، آن‌گاه X و Y دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشند [۱].

تذکره ۸ مثال زیر نشان می‌دهد که در غیاب زیراستقلال، لزومی ندارد که متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع نرمال استاندارد باشند.

مثال ۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع توأم نرمال دومتغیره با میانگین صفر و واریانس‌های مساوی $\frac{1}{2}(1-p)$ و ضریب همبستگی p باشند. در این صورت $\frac{1}{2}(X - Y)^2$ دارای توزیع خی‌دو با درجه‌ی آزادی ۱ است.

تذکره ۹ به آسانی مشاهده می‌شود که اگر متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل و هم‌توزیع باشند، و اگر $X + Y$ حول صفر متقارن باشد، آن‌گاه $\frac{1}{2}(X + Y)^2$ دارای توزیع خی‌دو با درجه‌ی آزادی ۱ است اگر و فقط اگر X و Y دارای توزیع نرمال استاندارد باشند.

گزاره‌ی ۵ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل و هم‌توزیع باشند. اگر X^2 و $\frac{1}{2}(X + Y)^2$ هم‌توزیع با توزیع خی‌دو با درجه‌ی آزادی ۱ باشند، آن‌گاه توزیع توأم X و Y نرمال استاندارد است [۲].

تذکره ۱۰ پولیا [۱۸] نشان داد که اگر X و Y مستقل و هم‌توزیع باشند، و اگر $\frac{1}{\sqrt{p}}(X + Y)$ و X نیز

هم توزیع باشند، آنگاه توزیع توأم X و Y نرمال استاندارد است. گزاره‌ی زیر این نتیجه را قوی‌تر می‌کند.

گزاره‌ی ۶ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل، هم‌توزیع و با تابع مشخصه‌ی φ باشند. اگر تابع مشخصه‌ی $X + Y$ برابر با $\varphi(\sqrt{2}t)$ باشد، آنگاه توزیع توأم X و Y نرمال استاندارد است [۱۱].

گزاره‌ی ۷ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل و هم‌توزیع باشند. اگر $X + Y$ دارای توزیع متقارن باشد، X و Y نیز توزیع متقارن دارند [۱۰].

تذکر ۱۱ واضح است که اگر متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل و دارای توزیع‌های متقارن باشند، آنگاه $X + Y$ توزیع متقارن دارد. اما از تقارن توزیع $X + Y$ و زیرمستقل (در واقع حتا مستقل) بودن X و Y نتیجه نمی‌شود که توزیع‌های X و Y متقارن‌اند. گزاره‌ی ۷ نشان می‌دهد که از متقارن بودن توزیع حاصل جمع دو متغیر زیرمستقل، متقارن بودن توزیع‌های دو متغیر تصادفی نتیجه می‌شود اگر دو متغیر مربوط، هم‌توزیع باشند.

در غیاب زیراستقلال، ممکن است یکی از دو حالت جالب زیر را داشته باشیم:

(آ) X و Y دارای توزیع‌های متقارن هستند و $X + Y$ نیز توزیع متقارن دارد؛

(ب) X و Y دارای توزیع‌های متقارن یکسان هستند، ولی $X + Y$ توزیع متقارن ندارد.

برای مثال‌های مربوط به حالت‌های (آ) و (ب) به [۱۰] مراجعه کنید.

گزاره‌ی ۸ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل و توزیع $X + Y$ متقارن باشد. اگر X دارای توزیع متقارن با تابع مشخصه‌ی $\varphi_X(t) \neq 0$ برای همه‌ی t ها باشد، آنگاه توزیع Y لزوماً متقارن خواهد بود [۱۰].

اگر تابع چگالی یک متغیر تصادفی متقارن باشد، تابع مشخصه‌ی آن حقیقی خواهد بود. اگر علاوه بر تقارن، تابع چگالی کراندار و تابع مشخصه مثبت باشد، تابع مشخصه‌ی مربوط، انتگرال‌پذیر است [۴، ص ۲۰] و در نتیجه خود مضربی از یک تابع چگالی خواهد بود. متغیر تصادفی با خاصیت اخیر را «معکوس» می‌نامند، زیرا می‌توان نقش چگالی و تابع مشخصه را تعویض کرد. یک متغیر تصادفی را «خودمعکوس» (self-reciprocal) گویند اگر تابع مشخصه و تابع چگالی آن، مضربی از یکدیگر باشند.

گزاره‌ی ۹ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y هم‌توزیع و با تابع چگالی کراندار باشند. اگر X و

$-Y$ زیرمستقل باشند، $X - Y$ معکوس است [۱۵].

گزاره‌ی ۱۰ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل و معکوس باشند. در این صورت $X + Y$ نیز معکوس است [۱۵].

گزاره‌ی ۱۱ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد و متغیر تصادفی Y به‌طور نامتناهی بخش‌پذیر^۴ باشد. اگر متغیرهای تصادفی X و Y زیرمستقل باشند، آن‌گاه $X + Y$ خودمعکوس است اگر و فقط اگر توزیع متغیر تصادفی Y نرمال باشد [۱۵].

ما تعریف خودمعکوس بودن را چنان تعمیم می‌دهیم که شامل آن دسته از متغیرهای تصادفی گردد که تابع چگالی آن‌ها، f دارای این خاصیت باشد که $Af(\alpha t)$ تابع مشخصه‌ی مربوط باشد، که در آن α و A ثابت‌های مناسب‌اند. این نوع متغیرهای تصادفی را «اکیداً خودمعکوس» (strictly self-reciprocal) می‌نامیم.

گزاره‌ی ۱۲ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد، و متغیر تصادفی Y اکیداً خودمعکوس و زیرمستقل از X باشد. در این صورت $X + Y$ خودمعکوس است اگر و فقط اگر توزیع آن نرمال باشد [۱۵].

۴ حالت بیش از دو متغیر تصادفی

در این بخش، نخست تعریف زیراستقلال را برای حالت بیش از دو متغیر تصادفی بیان می‌کنیم، که تعمیم واضح تعاریف ۱ و ۲ است. سپس نتایج به دست آمده در این حالت را بدون اثبات ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳ متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را زیرمستقل گویند اگر برای هر زیرمجموعه‌ی $\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_k}\}$ از $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\varphi_{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_k}}(t, t, \dots, t) = \varphi_{X_{\alpha_1}}(t) \varphi_{X_{\alpha_2}}(t) \cdots \varphi_{X_{\alpha_k}}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

برای آن‌که یک قضیه‌ی حدی مرکزی براساس مفهوم زیراستقلال بیان کنیم، نیاز به سه تعریف زیر داریم:

تعریف ۴ هرگاه $\lambda \geq 0$ ، مجموعه‌ی همه‌ی متغیرهای تصادفی X را که شرایط زیر برای آن‌ها برقرار است، R_λ می‌نامیم.

$$E|X|^\lambda < \infty \quad (A)$$

ب) $E(X^k) = m_k$, $k = 1, 2, \dots, [\lambda]$, که در آن k, m_k امین گشتاور Z , متغیر تصادفی نرمال استاندارد، است.

تعریف ۵ فرض کنید M_λ مجموعه‌ی همه‌ی توابع توزیع متغیرهای تصادفی $X \in R_\lambda$ باشد. به‌ازای $\lambda \geq 0$, تابع d_λ از $M_\lambda \times M_\lambda$ به $\mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_\lambda(F, G) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| E \left(\frac{e^{iXt} - e^{iYt}}{|t|^\lambda} \right) \right|,$$

که در آن F و G به‌ترتیب، توابع توزیع متغیرهای تصادفی X و Y هستند.

تعریف ۶ فرض کنید که $\alpha > 0$ و X و Y متعلق به R_λ زیرمستقل و هم‌توزیع باشند. تابع $T_\alpha : M_\lambda \rightarrow M_\alpha$ تابعی است که تابع توزیع X را به تابع توزیع $\frac{X+Y}{\alpha}$ می‌برد. بر حسب توابع مشخصه، T_α تابع مشخصه‌ی $\varphi(t)$ را به $\varphi^2(\frac{t}{\alpha})$ نسبت می‌دهد.

قضیه‌ی ۱ فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی زیرمستقل و هم‌توزیع، و با میانگین صفر و واریانس ۱ باشد به‌طوری که برای هر $\lambda, \lambda > 2$, داشته باشیم $E|X|^\lambda < \infty$. در این صورت،

$$2^{-\frac{n}{\lambda}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{D} Z, \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty$$

که در آن D همگرایی در توزیع است. به‌علاوه، توابع توزیع $\sum_{i=1}^n X_i$ در متریک M_λ (یعنی d_λ) همگرا هستند و نرخ همگرایی عبارت است از:

$$d_\lambda(T_{\sqrt{n}}^n F, \Phi) < 2^{n(1-\frac{\lambda}{2})} (E|X|^\lambda + E|Z|^\lambda),$$

که در آن Φ تابع توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z است [۱۳].

قضیه‌ی بالا برای حالتی بیان شده است که متغیرهای تصادفی زیرمستقل، هم‌توزیع هستند. تعمیم این قضیه به حالتی که متغیرها هم‌توزیع نیستند و همه‌ی اندیس‌ها در نظر گرفته شوند، دشوار نیست و بر اساس لم زیر بنا نهاده می‌شود.

لم ۱ فرض کنید X_1, X_2, Y_1, Y_2 دو جفت از متغیر تصادفی زیرمستقل در R_λ باشند و $\alpha > 0$. همچنین فرض کنید F_1, F_2, G_1, G_2 به‌ترتیب، توابع توزیع آن‌ها باشند. در این صورت،

$$d_\lambda(F, G) < \alpha^{-\lambda} \{d_\lambda(F_1, G_1) + d_\lambda(F_2, G_2)\},$$

که در آن F تابع توزیع $\frac{X_1+X_2}{\alpha}$ و G تابع توزیع $\frac{Y_1+Y_2}{\alpha}$ است [۱۳].

تذکر ۱۲ توجه کنید که لم بالا برای حالتی که $\frac{X_1+X_2}{\alpha}$ لزوماً در R_λ نیست نیز برقرار است.

قضیه ۲ فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی زیرمستقل در R_λ ($\lambda > 2$) باشد که توابع توزیع آن‌ها متعلق به مجموعه‌ای کراندار در M_λ هستند. در این صورت [۱۳]،

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{D} Z, \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty$$

تذکر ۱۳ ممکن است این سؤال مطرح شود که آیا این نتایج برای مقادیر دیگری از α به جز $\sqrt{2}$ نیز برقرارند. مشکلی که در M_λ برای $\lambda \geq 2$ ظاهر می‌شود این است که $T_\alpha M_\lambda \not\subset M_\lambda$ ؛ زیرا واریانس هر عضو M_λ برابر با ۱ است، ولی واریانس $T_\alpha X$ برابر با $\frac{1}{\alpha^2}$ است. بنا براین، ما فرض می‌کنیم $\lambda < 2$ و برای این‌که تابع T_α اکیداً منقبض‌کننده (strictly contractive) باشد، باید $\alpha > 2^{\frac{1}{\lambda}}$ اختیار شود. در این حالت، توزیع نرمال، نقطه‌ی ثابت T_α نیست، بلکه توزیع δ (جرم نقطه‌ای) نقطه‌ی ثابت آن است.

قضیه ۳ فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی زیرمستقل و هم‌توزیع باشد به طوری که برای یک λ ، $0 < \lambda < 2$ ، داشته باشیم $E|X|^\lambda < \infty$. اگر

$$(A) \quad 1 \leq \lambda < 2 \quad \text{و میانگین صفر باشد،}$$

یا

$$(B) \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{و نامساوی } \alpha > 2^{\frac{1}{\lambda}} \text{ را برقرار کند،}$$

آنگاه

$$\alpha^{-n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{D} Y, \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty$$

که در آن Y متغیر تصادفی با تابع توزیع δ است [۱۳].

تذکر ۱۴ توجه کنید که تعریف ۳ را بر حسب توابع مشخصه ارائه کردیم نه بر حسب پیچش. دلیل این کار، این است که اثبات قضیه‌های همگرایی غالباً بر اساس توابع مشخصه است. ثابت کردن قضیه‌ی حدّی مرکزی، مثلاً بر اساس توزیع پیچش، کار ساده‌ای نیست.

در خاتمه‌ی این بخش، مثال جالبی را مطرح می‌کنیم که از [۹] گرفته شده است. خواننده می‌تواند برداشت‌های متفاوتی از این مثال داشته باشد و تحت عناوین مختلف در کلاس درس از آن استفاده نماید.

مثال ۵ فرض کنید $f(u) = \exp\{-\frac{u^2}{2}\}$ ، و مجموعه‌ی همه‌ی توابع چگالی برای بردار تصادفی

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n f(x_j) \left[1 + \beta(x_1^2 - x_2^2) \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^n x_j I_{(-1,1)}(x_j) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\} \right],$$

که در آن، $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ، و β چنان اختیار می‌شود که

$$\left| \beta(x_1^2 - x_2^2) \prod_{j=1}^n x_j I_{(-1,1)}(x_j) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\} \right| \leq 1.$$

تابع مشخصه برای $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ عبارت است از:

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n f(t_j) + \beta \left\{ [\psi(t_1)\psi^*(t_2) - \psi^*(t_1)\psi(t_2)] \prod_{j=3}^n \psi(t_j) \right\},$$

که در آن، $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ، و

$$\psi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t_i}{t^i} \right) \{ \sin t - t \cos t \}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad \text{اگر } i$$

و

$$\psi^*(t) = \begin{cases} \left(\frac{t_i}{t^i} \right) + \left(\frac{t}{t^i} \right) \psi(t), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad \text{اگر } i$$

حال به آسانی مشاهده می‌شود که:

(آ) $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای توزیع حاشیه‌ای یکسان نرمال استاندارد می‌باشند؛

(ب) اعضای هر مجموعه‌ای از r ($n > r$) متغیر تصادفی، مستقل‌اند و در نتیجه $\sum_{j=1}^r a_j X_j$ دارای توزیع نرمال است؛

(پ) اگر $U = X_1 \pm X_2$ ، و V ترکیبی خطی از متغیرهای تصادفی $X_3, X_4, \dots, X_n$ باشد، $U + V$ دارای توزیع نرمال است؛

- (ت) اگر برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، $a_j \neq 0$ و $|a_1| \neq |a_2|$ ، آنگاه $\sum_{j=1}^n a_j X_j$ دارای توزیع نرمال نیست؛
- (ث) $E(\prod_{j=1}^n X_j) = 0$
- (ج) $X_1, X_2, \dots, X_n$ زیرمستقل اند.

۵ مشخص سازی های توزیع نرمال بر اساس چند متغیر تصادفی

می دانیم که اگر Z نرمال استاندارد باشد، Z^2 دارای توزیع χ^2_1 است، ولی عکس آن صادق نیست؛ یعنی، اگر X^2 توزیع χ^2_1 داشته باشد، لزومی ندارد که X نرمال استاندارد باشد. واضح است که اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل و دارای توزیع یکسان نرمال استاندارد باشند، $n\bar{X}_n^2$ (که در آن $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$) توزیع χ^2_1 دارد. در این بخش، دو قضیه ی مشخص سازی توزیع نرمال بر اساس چند متغیر تصادفی زیرمستقل ارائه می کنیم.

قضیه ی ۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ زیرمستقل و هم توزیع باشند. اگر متغیر تصادفی $k\bar{X}_k^2$ برای دو مقدار متمایز k دارای توزیع χ^2_1 باشد، توزیع مشترک متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ توزیع نرمال استاندارد است [۲].

فرض کنید $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ زیرمستقل و هم توزیع باشند. اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر باشد، $\sum_{i=1}^n X_i$ و $\sqrt{n}X$ هم توزیع خواهند بود. عکس این مطلب در قضیه ی زیر بیان شده، که از [۱۱] گرفته شده است.

قضیه ی ۵ فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ زیرمستقل و هم توزیع باشند. اگر تابع مشخصه ی مشترک آن ها، φ ، رابطه ی زیر را برقرار کند،

$$\varphi(t) = \{\varphi(\sqrt{nt})\}^{\frac{1}{n}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

φ تابع مشخصه ی یک توزیع نرمال با میانگین صفر است.

۶ مسئله ی باز

می دانیم که دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند اگر یکی از سه شرط (معادل) زیر برقرار باشد:

(آ) برای همه‌ی مجموعه‌های بویل-اندازه‌پذیر A و B ,

$$\Pr(X \in A, Y \in B) = \Pr(X \in A)\Pr(Y \in B);$$

(ب) برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$$

که در آن، F_X ، F_Y و $F_{X,Y}$ به ترتیب توابع توزیع X ، Y و (X, Y) هستند؛

(پ) برای همه‌ی $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ ها،

$$\varphi_{X,Y}(t, s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s),$$

که در آن، φ_X ، φ_Y و $\varphi_{X,Y}$ به ترتیب توابع مشخصه‌ی X ، Y و (X, Y) هستند.

در حالت زیرمستقل، ما شرایطی مشابه (ب) و (پ) به صورت زیر داریم:

$$F_{X+Y}(u) = F_X * F_Y(u), \quad u \in \mathbb{R} \quad (\text{ب}')$$

$$\varphi_{X,Y}(t, t) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{پ}')$$

همان طوری که ملاحظه می‌کنید، در حالت زیراستقلال، شرطی مشابه (آ) تا کنون به دست نیامده است. این سبب شده است که مفهوم زیراستقلال به اندازه‌ی کافی مورد توجه قرار نگیرد. بعضی برای این عقیده هستند که تعریف (آ) که از تعریف پیشامدهای مستقل نتیجه شده، طبیعی و از نظر تجربی، معنادار است، و مفهوم زیراستقلال را غیر طبیعی می‌دانند؛ چون تعبیری مشابه (آ) بر حسب پیشامدها ندارد (البته تا امروز). شایان ذکر است که در آخرین مقاله‌ی ما [۱۱] داوران مقاله صریحاً خواستند که در باره‌ی مفهوم زیراستقلال، توضیحات بیش‌تری بدهیم. این دلالت بر آن می‌کند که افراد بیش‌تری در مورد این مفهوم کنج‌کاو شده‌اند، که البته باعث خوشحالی است. جایزه‌ای یک میلیون تومانی به اولین فرد (یا افرادی) داده خواهد شد که شرطی مشابه (آ) برای متغیرهای تصادفی زیرمستقل به دست آورند و مهم‌تر از کسب جایزه‌ی نقدی، اثری جاودان از خود بر جای گذارند. به امید موفقیت شما.

توضیحات

۱. فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی زیرمستقل با $E(X_n) = 0$ باشد. اگر $\sum \frac{\text{var}(X_n)}{n^2} < \infty$ ، آنگاه $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} 0$.

۲. فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی زیرمستقل و هم‌توزیع، و یکسان با میانگین صفر و واریانس مثبت و متاهی σ^2 باشد. در این صورت $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{D} Z$ ، که در آن، Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

۳. منظور از «دنباله‌ای متمایز» این است که معادله‌های پارامتری $t_1 = a_k t$ و $t_2 = b_k t$ بیان‌کننده‌ی تعدادی نامتناهی از خطوط در $\mathbb{R}^2$ باشند.

۴. مفیدترین متغیرهای تصادفی در آمار، آن‌هایی هستند که حدّ حاصل‌جمع متغیرهای تصادفی مستقل (یا زیرمستقل) می‌باشند. اگر متغیرهای تصادفی، هم‌توزیع باشند، متغیرهای تصادفی حدّی به‌طور نامتناهی بخش‌پذیرند (infinitely divisible)؛ یعنی، اگر $\varphi(t)$ تابع مشخصه‌ی مشترک آن‌ها باشد، $\frac{1}{n} \{\varphi(t)\}^n$ برای هر عدد درست مثبت n ، یک تابع مشخصه است. اگر تابع چگالی متغیر تصادفی به‌طور نامتناهی بخش‌پذیر، متقارن باشد، تابع مشخصه‌ی آن مثبت خواهد بود. اگر تابع چگالی کراندار هم باشد، تابع مشخصه‌ی مربوط، انتگرال‌پذیر است و در نتیجه متغیر تصادفی مربوط، معکوس است.

مرجع‌ها

- [1] Ahsanullah, M.; Hamedani, G.G. (1988). Some characterization of normal distribution. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* **37**, 95-99.
- [2] Ahsanullah, M.; Bansal, N.; Hamedani, G.G. (1991). On characterizations of normal distributions. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* **41**, 157-162.
- [3] Bazargan, H. (2004). Calculating the return value using a mathematical model of significant ware heights and the convolution of two distribution functions. Preprint.
- [4] Bochner, S.; Chandrasekharan, K. (1949). *Fourier Transforms*. Princeton University Press.
- [5] Chung, K.L. (1974). *A Course in Probability Theory*. Harcourt, Brace and Word, New York.
- [6] Cramér, H. (1936). Random variables and probability distributions. *Cambridge Tracts in Mathematics, Mathematical Physics*, Tract No. 36.
- [7] Durairajan, T.M. (1979). A Classroom note non sub-independence. *Gujarat Statist. Rev.* **VI**, No. 1, 17-18.
- [8] Hamedani, G.G. (1983). Some remarks an a paper of durairajan. *Gujarat Statist. Rev.* **X**, No. 2, 29-30.
- [9] Hamedani, G.G. (1984). Nonnormality of linear combinations of normal random variables. *Amer. Statist.* **38**, 295-296.
- [10] Hamedani, G.G. (1995). On symmetric sum of sub-independent random variables. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* **45**, 119-121
- [11] Hamedani, G.G.; Key, E.S.; Volkmer, H. (2004). Solution to a functional equation and its application to stable and stable-type distributions. To appear in *Statist. Probab. Lett.*

- [12] Hamedani, G.G.; Tata, M.N. (1975). On the determination of the bivariate normal distribution from distributions of linear combinations of the variables. *Amer. Math. Monthly* **82**, 913-915.
- [13] Hamedani, G.G.; Walter, G.G. (1984). A fixed point theorem and its application to the central limit theorem. *Arch. Math. (Basel)* **11**, 258-264.
- [14] Hamedani, G.G.; Walter, G.G. (1985). A characterization of reciprocal random variables. *Pub. Inst. Stat. Univ. XXX*, 45-60.
- [15] Lukacs, E. (1960). *Characteristic Functions*. Hofner, New York.
- [16] Mohammadpour, A. (2004). A sub-independent stable random vector. Preprint.
- [17] Pólya, G. (1923). Herleitung der Gauss's chen fehlergesetzes aus einer funktionalgleichung, *Math. Z.* **18**, 185-188.
- [18] Safe, A.; Mohammadpour, A. (2002). Sub-independent *SαS* random variables. Preprint.

دریافت: ۲۳ اردیبهشت ۱۳۸۳

ویرایش: ۳ مهر ۱۳۸۳

آخرین اصلاح: ۸ آذر ۱۳۸۳

انتشار: ۲۱ دی ۱۳۸۳

غلامحسین قراگزلو همدانی

بخش ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر،

دانشگاه مارکت (Marquette)،

ایالت ویسکانسین، ایالات متحد آمریکا.

پیام‌نگار: g.hamedani@mu.edu

The Concept of Sub-independence and Its Application in Statistics and Probabilities

G. G. Hamedani

Marquette University

Abstract. Many limit theorems, convergence theorems and characterization theorems in probability and statistics, in particular those related to normal distribution, are based on the assumption of independence of two or more random variables.

However, the full power of independence is not used in the proofs of these theorems, since it is the distribution of summation of the random variables which is needed and not the joint distribution of those variables. A concept is re-introduced, which is quite weak in comparison to independence, and can replace the concept of independence in most of the above mentioned theorems. Another relatively new concept will also be mentioned and some related results are discussed.

© 2004 Statistical Research Center. All rights reserved.

Keywords. sub-independent random variables; reciprocal random variables; characterization of distributions.

