Statistical Research and Training Center
©(2005) J. Stat. Res. Iran **2** 132-148

مجلّه‌ی پژوهش‌های آماری ایران
دوره‌ی ۱، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۸۳، صص ۱۶۱-۱۷۷
پژوهشکده‌ی آمار

برآوردگر مینیماکس خطی بریده‌ی توانی از پارامتر مقیاس در فضای پارامتری از پایین کراندار

نادر نعمت‌الهی[†,*] و محمد جعفری جوزانی[‡]

[†]دانشگاه علامه طباطبایی

[‡]دانشگاه شهید بهشتی

چکیده. مسئله‌ی برآورد مینیماکس در فضای پارامتری مقیّد و به‌ویژه کراندار در دو دهه‌ی اخیر مورد توجه روزافزون پژوهشگران قرارگرفته است. در این مقاله رده‌ی برآوردگرهای خطی بریده برای برآورد توان rام پارامتر مقیاس از پایین کراندار، یک زیرخانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها را در نظر می‌گیریم. در این مقاله نشان می‌دهیم که تحت تابع زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردا، همه‌ی اعضای این رده ناپذیرفتنی هستند و فقط یکی از آن‌ها مینیماکس است. برآوردگر مینیماکس به‌دست آمده با برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر مقیاس و از پایین کراندار که توسط جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲) به دست آمده است، مقایسه خواهد شد. همچنین با در نظر گرفتن خانواده‌ی توزیع‌های خی‌دوی تبدیل‌یافته، برای پارامتر از پایین کراندار این خانواده، که لزوماً پارامتر مقیاس نیست، نتایجی مشابه به دست خواهیم آورد.

واژگان کلیدی. فضای پارامتری بریده؛ برآوردگرهای خطی بریده؛ برآوردکردن مینیماکس؛ قابلیت‌قبول؛ خانواده‌ی نمایی؛ زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردا.

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات.

۱ مقدمه

در اغلب مطالعات آماری فرض می‌شود فضای پارامتری مورد بررسی غیرکراندار است، در حالی که به‌نظر می‌رسد در بیش‌تر مسائل عملی به‌ویژه در بررسی میانگین و واریانس پدیده‌های واقعی مانند میزان بارش باران، قد یا وزن افراد یا مقادیرکنترل در فرایندهای صنعتی، فرض غیرکراندار بودن فضای پارامتری غیرواقعی باشد. بنا بر این، یکی از مسائل مهم در استنباط آماری، مسئله‌ی برآورد در فضاهای پارامتری مقیّد است که حالت خاص آن برآوردیابی در فضای پارامتری کراندار است. در آمار کلاسیک، این مسئله زمانی روی می‌دهد که اطلاعاتی در مورد پارامتر نامعلوم θ به‌صورت کرانی روی آن موجود باشد. به‌عنوان مثال، در مسائل مربوط به رگرسیون خطی ساده، فرض می‌کنیم شیب خط رگرسیونی مثبت یا منفی باشد. همچنین، در آمار بیزی این مسئله با این فرض که توزیع پیشین برای θ دارای فضای پارامتری کراندار باشد، به‌وجود می‌آید. در دو دهه‌ی اخیر، پژوهشگران به‌طور گسترده‌ای برآورد مینیماکس پارامترهای کراندار را مورد توجه قرار داده‌اند. برای مشاهده‌ی خلاصه‌ای از نتایج و فهرستی از مراجع در این زمینه به بدر و بیشاف (۲۰۰۳) مراجعه کنید. همچنین، درخصوص برآورد مینیماکس پارامتر مقیاس کراندار نیزکارهای زیادی انجام شده است که از جمله می‌توان به بیشاف (۱۹۹۲)، ایکنور و فیگر (۱۹۸۹)، جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲)، کالوسکا (۱۹۸۸)، وان ایدن (۱۹۹۵)، (۲۰۰۰) و وان ایدن و زیدک (۱۹۹۹) اشاره کرد. پژوهشگران مسئله‌ی برآورد در فضای پارامتری کراندار را از دو جنبه بررسی کرده‌اند. در جنبه‌ی نخست، به دست آوردن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی (ML)، پذیرفتنی و مینیماکس پارامترهای کراندار تحت توابع زیان توان دوم خطا یا توان دوم خطای مقیاس ناوردا مورد نظر بوده است. در جنبه‌ی دوم، پژوهشگران برآوردگرهای بُریده‌ی برآوردگرهای عادی را به‌عنوان برآوردگر طبیعی پارامترهای کراندار در نظر گرفته و برآوردگرهای مینیماکس و پذیرفتنی را برای این پارامترها در رده‌ی برآوردگرهای بریده به دست آورده‌اند. برای مثال، برآوردگر ML پارامتر میانگین کراندار توزیع نرمال از نوع برآوردگرهای خطی بریده است. همچنین، در خانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها، یک رده از برآوردگرهای معقول برای پارامتر میانگین، در مسائل غیربریده، برآوردگرهای خطی هستند که از برآوردگرهای بیزی (یا بیز حدی) به دست می‌آیند. بنا بر این، در صورتی که پارامتر کراندار باشد، طبیعی به نظر می‌رسد که نوع بریده‌ی برآوردگرهای بالا را برای برآورد این پارامترها در نظر بگیریم.

موضوعی که در بیش‌تر مقاله‌ها درباره‌ی برآوردگرهای بریده مشاهده می‌شود، این است که با وجود این که آن‌ها برآوردگرهای غیربریده را بهبود می‌بخشند اما خود این برآوردگرها به‌دلیل تعمیم‌یافته نبودن برآوردگرهای بیزی، ناپذیرفتنی هستند. برای مثال، در برآورد پارامتر مقیاس از پایین کراندار توزیع‌های نمایی یا گاما، شاو و استرادرمن (۱۹۹۶)، وان ایدن (۱۹۹۵) و وان ایدن و زیدک (۱۹۹۴ b, c) رده‌ای از برآوردگرهای خطی

بریده را در نظر گرفتند و نشان دادند که این برآوردگرها ناپذیرفتنی هستند. از سوی دیگر برآوردگرهای غالب بر آن‌ها را نیز ارائه کردند. همچنین، در این رده، برآوردگرهای مینیماکس را به دست آوردند. در این مقاله با در نظر گرفتن یک زیرخانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها، شامل توزیع‌های نمایی، گاما، نرمال و وایبل که در آن پارامتر مقیاس θ یا توانی از آن پارامتر مورد علاقه است، تحت تابع زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردا، رده‌ی برآوردگرهای خطی بریده‌ی پارامتر مقیاس θ یا توانی از آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این رده نشان خواهیم داد که همه‌ی اعضا ناپذیرفتنی هستند و فقط یکی از آن‌ها مینیماکس است. به‌علاوه، این برآوردگر مینیماکس را با برآوردگر پذیرفتنی و مینیماکس پارامتر مقیاس از پایین کراندار که توسط جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲)، به دست آمده است، مقایسه خواهیم کرد. همچنین، نشان خواهیم داد که برآوردگر بریده‌ی مینیماکس پارامتر مقیاس کراندار $\theta \geqslant a$ در توزیع گاما که توسط وان ایدن (۱۹۹۵) ارائه شده است، یک حالت خاص از برآوردگری است که در این مقاله به دست آمده است.

برای این منظور در بخش دوم زیرخانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها، چند مثال و بعضی خواص آن را ارائه خواهیم کرد. در بخش سوم رده‌ی برآوردگرهای خطی بریده را معرفی می‌کنیم. در ادامه برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی بودن یا نبودن برآوردگرهای این رده را به دست می‌آوریم و چند حالت خاص را بررسی می‌کنیم. همچنین، با در نظر گرفتن خانواده‌ی توزیع‌های خی‌دوی تبدیل‌یافته که توسط رحمان و گوپتا (۱۹۹۳) معرفی شده است، نتایج حاصل را به پارامتر از پایین کراندار این خانواده، که لزوماً پارامتر مقیاس نیست، تعمیم می‌دهیم. مقایسه‌ی برآوردگر مینیماکس خطی بریده و برآوردگر پذیرفتنی و مینیماکس پارامتر مقیاس از پایین کراندار در بخش چهارم آورده شده است.

۲ زیرخانواده‌ی نمایی از توزیع‌ها و خواص آن

فرض کنید X_1، X_2، ...، X_m نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی m از توزیعی با تابع چگالی $\frac{1}{\tau} g\left(\frac{x}{\tau}\right)$ باشد که در آن τ پارامتر مقیاس نامعلوم است. چگالی توأم X_1، X_2، ...، X_m عبارت است از:

$$f(\mathbf{x};\tau) = \frac{1}{\tau^m}\Pi_{i=1}^{m} g\left(\frac{x_i}{\tau}\right).$$

در بعضی حالت‌ها چگالی بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (پارسیان و نعمت‌الهی، ۱۹۹۶):

$$f(\mathbf{x};\theta) = c(\mathbf{x},m)\theta^{-\nu}\exp\left\{-\frac{T(\mathbf{x})}{\theta}\right\}. \qquad (1)$$

که در آن $c(\mathbf{x},m)$ تابعی از $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)'$ و m، $\theta = \tau^r$، ν تابعی از m و $T(\mathbf{X})$ یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای θ با توزیع گاما با پارامترهای ν و θ هستند. مثال‌های زیر برخی از توزیع‌های

متعلق به مدل (۱) هستند.

آ) **توزیع نمایی:** $\text{Exponential}(\beta)$ با $\theta = \beta$، $\nu = m$، $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} X_i$ و $c(\mathbf{x}, m) = 1$.

ب) **توزیع گاما:** $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ با αی معلوم، $\theta = \beta$، $\nu = m\alpha$، $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} X_i$ و $c(\mathbf{x}, m) = \Pi_{i=1}^{m} \frac{x_i^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

پ) **توزیع نرمال:** $\text{N}(0, \sigma^2)$ با $\theta = \sigma^2$، $\nu = \frac{m}{2}$، $T(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2$ و $c(\mathbf{x}, m) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}$.

ت) **توزیع وایبل:** $\text{WE}(\alpha, \beta)$ با βی معلوم، $\theta = \alpha^\beta$، $\nu = m$، $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} X_i^\beta$ و $c(\mathbf{x}, m) = \beta^m \Pi_{i=1}^{m} x_i^{\beta-1}$.

ث) **توزیع گاوسی وارون:** $\text{IG}(\infty, \lambda)$ با $\theta = \frac{1}{\lambda}$، $\nu = \frac{m}{2}$، $T(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{X_i}$ و $c(\mathbf{x}, m) = (\Pi_{i=1}^{m} 2\pi x_i^3)^{-\frac{1}{2}}$.

ج) **توزیع لاپلاس تعمیم یافته:** $\text{Generalized Laplace}(\lambda, k)$ با kی معلوم، $\theta = \lambda^k$، $\nu = \frac{m}{k}$، $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} |X_i|^k$ و $c(\mathbf{x}, m) = \left\{\frac{k}{2\Gamma(\frac{1}{k})}\right\}^m$.

چ) **توزیع گامای تعمیم یافته:** $\text{Generalized Gamma}(\lambda, p, \alpha)$ با p و αی معلوم، $\theta = \frac{1}{\lambda}$، $\nu = \frac{mp}{\alpha}$، $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} X_i^\alpha$ و $c(\mathbf{x}, m) = \left\{\frac{|\alpha|}{\Gamma(\frac{p}{\alpha})}\right\}^m (\Pi_{i=1}^{m} x_i)^{p-1}$.

در خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱)، $\frac{T(\mathbf{X})}{\nu}$ بهترین برآوردگر نااریب (UMVUE) برای θ است. در زیر نشان می‌دهیم که تحت تابع زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردا:

$$\text{L}(\theta, \delta) = \left(\frac{\delta}{\theta} - 1\right)^2, \tag{2}$$

برآوردگر $\delta_m(\mathbf{X}) = \frac{T(\mathbf{X})}{\nu+1}$، یک برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی برای پارامتر $\theta > 0$ و نیز بهترین برآوردگر نااریب یک برآوردگر ناپذیرفتنی است.

قضیه‌ی ۱ در خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱) و تحت تابع زیان (۲)، برآوردگر $\delta_m(\mathbf{X}) = \frac{T(\mathbf{X})}{\nu+1}$ یک برآوردگر مینیماکس برای پارامتر $\theta > 0$ است.

برهان. به‌راحتی اثبات می‌شود که

$$R(\theta,\delta_m)=E\left\{\mathrm{L}(\theta,\delta_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}))\right\}=\frac{1}{\nu+1}. \tag{۳}$$

حال با تعریف $\eta=\frac{1}{\theta}$ و انتخاب توزیع پیشین $\mathrm{Gamma}(\gamma,\frac{1}{g})$ برای η به‌سادگی تحقیق می‌شود که برآوردگر بیزی پارامتر θ تحت این توزیع پیشین و تحت تابع زیان (۲) عبارت است از:

$$\delta_B(\mathbf{X})=\frac{T(\mathbf{X})+g}{\nu+\gamma+1},$$

که مخاطره‌ی بیزی آن عبارت است از:

$$r(\pi,\delta_B)=E\left\{R(\theta,\delta_B)\right\}=\frac{\nu+(\gamma+1)^2+2g^2\gamma(\gamma+1)+g^3\gamma(\gamma+1)}{(\nu+\gamma+1)^2}.$$

در نتیجه با توجه به (۳) داریم:

$$\lim_{\gamma\to 0} r(\pi,\delta_B)=\frac{1}{\nu+1}=R(\theta,\delta_m)=\sup_{\theta>0}R(\theta,\delta_m).$$

بنا بر این، طبق قضیه‌ی ۱۲٫۱٫۵ (روش بیزی حدی) لی‌من و کسلا (۱۹۹۸) برآوردگر $\delta_m(\mathbf{X})$ برای θ مینیماکس است.

قضیه‌ی ۲ در خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱) و تحت تابع زیان (۲)، برآوردگرهای خطی $\delta(\mathbf{X})=aT(\mathbf{X})+b$ پذیرفتنی هستند اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

آ) $b>0$، $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{\nu+1}$ یا

ب) $b=0$، $a=\frac{1}{\nu+1}$

برهان. خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(\mathbf{x};\eta)=c(\mathbf{x},m)(-\eta)^{\nu}\exp\{\eta T(\mathbf{x})\},$$

که در آن $\eta=-\frac{1}{\theta}<0$ و $\beta(\eta)=(-\eta)^{\nu}$ است. با استفاده از روش کارلین (۱۹۵۸)، برآوردگر

$$\delta_{\lambda,\gamma}(\mathbf{X})=\frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{T}{\nu}+\frac{\gamma\lambda}{1+\lambda}$$

برای $E_\theta(\frac{T}{\nu})=\theta$ پذیرفتنی است اگر انتگرال‌های

$$\int_{-\infty}^{-C}\exp\left(-\gamma\lambda\eta\right)(-\eta)^{-\nu\lambda}d\eta=b\int_{C}^{\infty}\exp\left(\gamma\lambda\eta\right)\eta^{-\nu\lambda}d\eta$$

و

$$\int_{\circ}^{C} \exp(\gamma\lambda\eta)\eta^{-\nu\lambda} d\eta,$$

هر دو همزمان واگرا باشند. اولین انتگرال در صورتی واگراست که $\gamma = \circ$، $\nu\lambda \leqslant ۱$ یا $\gamma\lambda > \circ$ باشد و انتگرال دوم زمانی واگراست که $\nu\lambda \leqslant ۱$ باشد. با تلفیق این شرایط، برآوردگر $\delta_{\lambda,\gamma}(\mathbf{X})$ در صورتی پذیرفتنی است که

آ) $\gamma = \circ$، $\lambda = \frac{۱}{\nu}$ یا

ب) $\gamma > \circ$، $\lambda \geqslant \frac{۱}{\nu}$.

اگر قرار دهیم $a = \frac{۱}{(۱+\lambda)\nu}$ و $b = \frac{\gamma\lambda}{۱+\lambda}$، آن‌گاه برآوردگر $\delta(\mathbf{X}) = aT(\mathbf{X}) + b$ در صورتی برای θ پذیرفتنی است که

آ) $b = \circ$، $a = \frac{۱}{\nu+۱}$ یا

ب) $b > \circ$، $\circ < a \leqslant \frac{۱}{\nu+۱}$.

همچنین، برای $a = \circ$ و $b > \circ$ برآوردگر $\delta(\mathbf{X}) = b$ پذیرفتنی است زیرا یگانه برآوردگری است که در $\theta = b$ دارای مخاطره‌ی صفر است. اثبات ناپذیرفتنی بودن برآوردگر $\delta(\mathbf{X})$ در خارج از ناحیه‌ی (آ) و (ب) به‌راحتی به دست می‌آید.

نتیجه‌ی ۱ در خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱) و تحت تابع زیان (۲)، برآوردگر $\delta_m(\mathbf{X}) = \frac{T(\mathbf{X})}{\nu+۱}$ یک برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی برای θ است و مقدار مخاطره‌ی مینیماکس این برآوردگر، $\frac{۱}{\nu+۱}$ است.

حال فرض کنید فضای پارامتری از پایین کراندار باشد، یعنی محدودیت $\theta \geqslant a$ با شرط $a > \circ$ را در خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱) اعمال کنیم. جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲) نشان دادند، برای خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱) و تحت تابع زیان (۲)، برآورد

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta^*(T(\mathbf{x})) = \frac{T(\mathbf{x})}{\nu+۱}\left\{۱ + \frac{\left(\frac{T(\mathbf{x})}{a}\right)^{\nu+۱}\exp\left(-\frac{T(\mathbf{x})}{a}\right)}{\int_{\circ}^{\frac{T(\mathbf{x})}{a}} u^{\nu+۱}\exp(-u)\, du}\right\} \tag{۴}$$

وقتی $\theta \geqslant a$ باشد، یک برآورد مینیماکس و پذیرفتنی برای $\theta = \tau^r$ است. علاوه بر این، مقدار مخاطره‌ی مینیماکس برابر $\frac{۱}{\nu+۱}$ است و این مقدار به‌ازای $\theta = a$ یا $\theta \to \infty$ به دست می‌آید.

در بخش بعد نشان خواهیم داد که برآوردگر مینیماکس خطی بریده‌ی θ با شرط $\theta \geqslant a$ در خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱) عبارت است از:

$$\delta_{\frac{۱}{\nu+۱}}(\mathbf{X}) = \max\left\{a, \frac{T(\mathbf{X})}{\nu+۱}\right\}, \tag{۵}$$

که در بخش آخر آن را با برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی (۴) مقایسه خواهیم کرد.

۳ برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی در رده‌ی برآوردگرهای خطی بریده

فرض کنید $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ دارای چگالی توأم به شکل (۱) باشد. برای برآورد پارامتر θ تحت محدودیت $\theta \geqslant a$ (که a مقداری معلوم و مثبت است) و تحت تابع زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردای (۲)، رده‌ی برآوردگرهای خطی بریده‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$C=\{\delta_s | \delta_s(\mathbf{x})=\max\{a, sT(\mathbf{x})\},\ a>0,\ s>0\}, \tag{۶}$$

وان ایدن و زیدک (a, b, c ۱۹۹۴) و وان ایدن (۱۹۹۵) به‌ترتیب از این رده برای برآورد پارامتر مقیاس از پایین کراندار توزیع F و توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم استفاده کردند. آن‌ها با به‌کارگیری تابع زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردا، تعدادی از خواص برآوردگرها در این رده را به دست آوردند.

در این مقاله ما خواصی مشابه برای خانواده‌ی توزیع‌های (۱) به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که برای برآورد $\theta \geqslant a$، دقیقاً یک برآوردگر مینیماکس در رده‌ی C وجود دارد.

با تعمیم نتایج براون (۱۹۸۶) (قضیه‌ی ۲۳٫۴) و چاراس و وان ایدن (۱۹۹۴)، می‌توان نشان داد که در خانواده‌ی توزیع‌های (۱) و تحت تابع زیان (۲) برآوردگرهای δ_s در رده‌ی C برای برآورد $\theta \geqslant a$ ناپذیرفتنی هستند.

شاو و استرادرمن (۱۹۹۶) برای برآورد پارامتر $\theta \geqslant a$ در توزیع نمایی و توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم و تحت تابع زیان توان دوم خطا، رده‌ی برآوردگرهای بریده‌ی زیر، که زیررده‌ای از C است را در نظر گرفتند:

$$C_1=\left\{\delta_{s,u} | \delta_{s,u}(\mathbf{x})=\max\ \{a, sT(\mathbf{x})+u\},\ 0<s\leqslant\frac{1}{\nu+1},\ 0\leqslant u\leqslant a\right\}. \tag{۷}$$

آن‌ها نشان دادند که برآوردگرهای درون این رده ناپذیرفتنی هستند. همچنین برآوردگرهایی که بر آن‌ها غلبه دارند را معرفی کردند. با جایگزینی $T(\mathbf{X})$، ν، s، u و a به‌ترتیب به‌جای X، α، a، b و θ_0 در قضیه‌ی ۱٫۴ شاو و استرادرمن (۱۹۹۶) می‌توان قضیه‌ی زیر را برای خانواده‌ی توزیع‌های (۱) و تحت تابع زیان توان دوم خطای مقیاس ناوردای (۲) به‌راحتی اثبات کرد.

قضیه‌ی ۳ در خانواده‌ی توزیع‌های (۱) و تحت تابع زیان (۲)، اگر

$$\delta_1(T) = \delta_1(\mathbf{X}) = \delta_{s,u}(\mathbf{X}) + kG(T)\mathrm{I}_{[A,Ad]}(T) \qquad (8)$$

که در آن $\delta_{s,u} \in C_1$ و $d > 1$ یک عدد صحیح ثابت است، آن‌گاه δ_1 بر $\delta_{s,u}$ غلبه دارد به‌شرط آن‌که

$$G(t) = t^{1-\nu}\sin(ct)$$

و

$$0 < k < \frac{4sd^{\nu-1}}{(d-1)(\frac{1}{a^2}+c^2)}A^{\nu-2}\left[\{c(d-1)A+1\}\exp\left\{-\frac{(d-1)A}{a}\right\}-1\right],$$

که در آن $A = \frac{a-u}{s} > 0$ و $c > \frac{\exp\{\frac{(d-1)A}{a}\}}{(d-1)A}$ به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که cA مضربی صحیح از 2π باشد.

حال اگر زیررده‌ای از C_1 و C را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$$C' = \left\{\delta_s \in C | 0 < s \leqslant \frac{1}{\nu+1}\right\}$$

آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی ۲ و قرار دادن $u = 0$ دیده می‌شود که در خانواده‌ی توزیع‌های (۱) و تحت تابع زیان (۲) برآوردگرهای رده‌ی C' ناپذیرفتنی هستند و به‌وسیله‌ی برآوردگر δ_1 در (۸) مغلوب می‌شوند. با این وجود، رده‌ی C' شامل تمام برآوردگرهای درون‌رده‌ی C است که در رده‌ی C پذیرفتنی هستند و یگانه برآوردگر مینیماکس در رده‌ی C، برآوردگر $\delta_{\frac{1}{\nu+1}}$ در (۵) است که این مطلب توسط قضیه‌های زیر و با انجام عملیات مشابه لم‌های ۱٫۳ و ۲٫۳ و قضیه‌های ۱٫۳ تا ۳٫۳ وان ایدن (۱۹۹۵) و جایگذاری $T(\mathbf{X})$، ν و s به‌ترتیب به‌جای X، α و ρ به‌راحتی اثبات می‌شود. برای مشاهده‌ی خلاصه‌ای از اثبات این قضیه‌ها به پیوست مراجعه کنید.

قضیه‌ی ۴ برای خانواده‌ی توزیع‌های (۱) و تحت تابع زیان (۲)، برآوردگر δ_s برای $\frac{1}{\nu+1} \leqslant s < s'$ بر برآوردگر $\delta_{s'}$ غلبه دارد. همچنین، هر برآوردگری در رده‌ی C' یک برآوردگر پذیرفتنی در رده‌ی C است.

قضیه‌ی ۵ برای خانواده‌ی توزیع‌های (۱) و تحت تابع زیان (۲)، برآوردگر $\delta_{\frac{1}{\nu+1}}(\mathbf{X})$ یک برآوردگر مینیماکس برای پارامتر $a \geqslant \theta$ است و هیچ برآوردگر دیگری در رده‌ی C مینیماکس نیست.

با توجه به قضیه‌های بالا، نکات زیر به‌سادگی قابل اثبات است.

۱. قضیه‌ی ۴ نشان می‌دهد که رده‌ی C' شامل تمام برآوردگرهای δ_s، $s > ٠$ است که در C پذیرفتنی هستند. همچنین، این قضیه، برآوردگرهایی در C که بر برآوردگرهای رده‌ی $C - C'$ غلبه دارند را مشخص می‌کند.

۲. با توجه به این‌که $\delta_{\frac{١}{\nu+١}}(\mathbf{X})$ به رده‌ی C' تعلق دارد، بنا بر این، طبق قضیه‌ی ۴ یک برآوردگر پذیرفتنی در رده‌ی C است. همچنین، مینیماکس بودن برآوردگر $\delta_{\frac{١}{\nu+١}}(\mathbf{X})$ نشان می‌دهد که برآوردگرهای شاو و استرادرمن (۸) که بر آن غلبه دارند نیز مینیماکس هستند.

۳. در قضیه‌ی ۱ نشان داده شد که برای $\theta > ٠$، برآوردگر $\delta_m(\mathbf{X}) = \frac{T(\mathbf{X})}{\nu+١}$ یک برآوردگر مینیماکس است و $\delta_{\frac{١}{\nu+١}}(\mathbf{X}) = \max\left\{٠, \frac{T(\mathbf{X})}{\nu+١}\right\}$ که برآوردگری مینیماکس برای $\theta \geqslant a > ٠$ است، حالت بریده شده‌ی برآوردگر مینیماکس $\delta_m(\mathbf{X})$ در حالت بدون محدودیت است.

۳٫۱ حالت‌های خاص

با استفاده از قضیه‌ی ۵ و خانواده‌ی توزیع‌های مدل (۱)، حالت‌های خاص زیر از برآوردگر به دست آمده در (۵) حاصل می‌شود.

آ) با فرض $m = ١$ برآوردگر پذیرفتنی و یگانه برآوردگر مینیماکس برای پارامتر مقیاسِ نامعلوم θ در توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم α در رده‌ی C و تحت تابع زیان (۲) در فضای پارامتری $[a,\infty)$، $a > ٠$ عبارت است از $\delta_{\frac{١}{\alpha+١}}(X) = \max\left\{a, \frac{X}{\alpha+١}\right\}$ که همان برآوردگر به دست آمده توسط وان ایدن (۱۹۹۵) است. بنا بر این، برآوردگر به دست آمده توسط وان ایدن یک حالت خاص از برآوردگر (۵) می‌باشد.

ب) با توجه به حالت‌های خاص خانواده‌ی توزیع‌های (۱) که در بخش ۲ معرفی شدند، برآوردگر پذیرفتنی و تنها برآوردگر مینیماکس برای پارامتر $\theta = \tau^r$ در فضای پارامتری $[a,\infty)$، $a > ٠$ در توزیع‌های نمایی، گاما، نرمال و ... توسط رابطه‌ی (۵) با $T(\mathbf{X})$ و ν مناسب آن توزیع به دست می‌آید.

پ) نتایج به دست آمده را می‌توان به خانواده‌ی توزیع‌های دیگری که لزوماً به خانواده‌ی توزیع‌های مقیاس در مدل (۱) متعلق نیستند، از قبیل پارتو و بتا گسترش داد. یک خانواده از توزیع‌ها که این توزیع‌ها را به‌عنوان حالت خاص در بر دارد، خانواده‌ی توزیع‌های خی‌دوی تبدیل‌یافته است که توسط رحمان و گوپتا (۱۹۹۳) معرفی شده است. آن‌ها خانواده‌ی توزیع‌های نمایی

یک پارامتری زیر را در نظر گرفتند:

$$f(\mathbf{x};\eta)=\exp\{a(\mathbf{x})b(\eta)+c(\eta)+h(\mathbf{x})\} \tag{۹}$$

و نشان دادند که $\{-۲a(\mathbf{X})b(\eta)\}$ دارای توزیع $\text{Gamma}(\frac{j}{۲},۲)$ است اگر و فقط اگر

$$\frac{۲c'(\eta)b(\eta)}{b'(\eta)}=j. \tag{۱۰}$$

در حالتی که j عددی صحیح باشد، $\{-۲a(\mathbf{X})b(\eta)\}$ دارای توزیع خی‌دو با j درجه‌ی آزادی است. آن‌ها خانواده‌ی توزیع‌های (۹) که در شرط (۱۰) صدق می‌کند را خانواده‌ی توزیع‌های خی‌دوی تبدیل‌یافته نامیدند. برای مثال توزیع‌های بتا، پارتو، نمایی و لُگ‌نرمال به این خانواده تعلق دارند (جدول ۱ رحمان و گوپتا (۱۹۹۳) را ملاحظه کنید). حال به‌راحتی می‌توان نشان داد، اگر شرط (۱۰) برقرار باشد آن‌گاه خانواده‌ی توزیع‌های نمایی تک‌پارامتری (۹) به شکل خانواده‌ی توزیع‌های نمایی مقیاس (۱) با $\nu=\frac{j}{۲}$، $T(\mathbf{X})=a(\mathbf{X})$ و $\theta=\frac{-۱}{b(\eta)}$ است. بنا بر این، با این جایگزینی می‌توان نتایج حاصل را به خانواده‌ی توزیع‌های خی‌دوی تبدیل‌یافته، گسترش داد.

۴ مقایسه‌ی برآوردگرها

در این بخش برآوردگرهای خطی بریده در رده‌ی C را با برآوردگر پذیرفتنی و مینیماکس $\delta(\mathbf{X})=\delta^*\{T(\mathbf{X})\}$ در رابطه‌ی (۴) که توسط جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲) به دست آمده است، مقایسه می‌کنیم. نخست توجه کنید که $\delta(\mathbf{x})$ یک تابع اکیداً صعودی از $T(\mathbf{x})$ و $\lim_{T(\mathbf{x})\to\infty}\delta(\mathbf{x})=\infty$ است. از سوی دیگر با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم $\lim_{T(\mathbf{x})\to ۰}\delta(\mathbf{x})=a\frac{\nu+۲}{\nu+۱}$. همچنین، به‌ازای هر $s>۰$، تابع $\delta_s(\mathbf{x})=\max\{a,sT(\mathbf{x})\}$ یک تابع غیرنزولی از $T(\mathbf{x})$ است. رابطه‌ی بین برآوردگر $\delta(\mathbf{X})$ و برآوردگرهای δ_s در قضیه‌ی ۶ بیان شده است که برای اثبات آن به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱ در رده‌ی برآوردگرهای C، مقدار $s_۰>\frac{۱}{\nu+۱}$ وجود دارد به‌طوری که

$$R(a,\delta_s)\gtreqqless\frac{۱}{\nu+۱}\quad\Leftrightarrow\quad s\gtreqqless s_۰ \tag{۱۱}$$

برهان. اگر $h(t;\theta)$ تابع چگالی احتمال $T(\mathbf{X})$ باشد آن‌گاه:

$$\begin{aligned} R(\theta,\delta_s) &= \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^۲ + \int_{\frac{a}{s}}^{\infty} \left\{ \left(\frac{st}{\theta}-۱\right)^۲ - \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^۲ \right\} h(t;\theta)dt \\ &= \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^۲ + \int_{\frac{a}{s\theta}}^{\infty} \left\{ (st-۱)^۲ - \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^۲ \right\} \frac{۱}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-۱} \exp(-t)dt. \qquad (۱۲) \end{aligned}$$

بنا بر این،

$$R(\theta,\delta_s) = \int_{\frac{۱}{s}}^{\infty} (st-۱)^۲ \frac{۱}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-۱} \exp(-t)dt. \qquad (۱۳)$$

از (۱۳) به‌راحتی اثبات می‌شود، $R(a,\delta_s)$ یک تابع اکیداً صعودی از s است و $\lim_{s\to ۰} R(a,\delta_s) = ۰$ و $\lim_{s\to\infty} R(a,\delta_s) = \infty$. حال با استفاده از پیوستگی تابع $R(a,\delta_s)$ در s نتیجه می‌شود که یک $s_۰ > ۰$ وجود دارد که برای آن رابطه‌ی (۱۱) برقرار باشد. با استفاده از قضیه‌ی ۵ داریم:

$$R(a,\delta_{\frac{۱}{\nu+۱}}) \leqslant \sup_{\theta\geqslant a} R(\theta,\delta_{\frac{۱}{\nu+۱}}) = \frac{۱}{\nu+۱}.$$

بنا بر این، با توجه به اکیداً صعودی بودن $R(a,\delta_s)$، مقدار $s_۰$ی که در رابطه‌ی (۱۱) صدق می‌کند باید در شرط $s_۰ > \frac{۱}{\nu+۱}$ صدق کند.

قضیه‌ی ۶ برآوردگر δ_s، $s > ۰$، توسط δ مغلوب می‌شود اگر و فقط اگر $s > s_۰$ که $s_۰$ مقدار تعریف شده در لم ۱ است.

برهان. با توجه به لم ۱ به‌ازای هر $s > s_۰$ داریم $R(a,\delta_s) \geqslant \frac{۱}{\nu+۱}$ و از (۱۲) به‌راحتی نتیجه می‌شود $R(\theta,\delta_s)$ تابعی اکیداً صعودی از θ است [رابطه‌ی (۱۷) پیوست]. بنا بر این، به‌ازای هر $\theta \geqslant a$، $R(\theta,\delta_s) \geqslant \frac{۱}{\nu+۱}$ خواهد بود. همچنین به‌ازای هر $\theta \geqslant a$، $R(\theta,\delta) \leqslant \frac{۱}{\nu+۱}$ است. بنا بر این، δ_s به‌وسیله‌ی δ مغلوب می‌شود.

برای $s < s_۰$، δ نمی‌تواند δ_s را مغلوب کند زیرا طبق رابطه‌ی (۱۱) داریم:

$$R(a,\delta_s) < \frac{۱}{\nu+۱} = R(a,\delta) \qquad (۱۴)$$

بنا بر این، برآوردگر δ، برآوردگر δ_s را مغلوب می‌کند، اگر و فقط اگر $s > s_۰$ باشد.

با توجه به نتایج به دست آمده در بالا، سودها و زیان‌های استفاده از هر یک از برآوردگرهای δ و δ_s را در زیر می‌آوریم.

با استفاده از قضیه‌ی ۴، برآوردگر مینیماکس و ناپذیرفتنی $\delta_{\frac{1}{\nu+1}}$ بر تمام برآوردگرهای درون رده‌ی $C-C'$ غلبه دارد، حال آنکه با توجه به قضیه‌ی ۶ برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی δ فقط بر برآوردگرهایی از رده‌ی $C-C'$ غلبه دارد که برای آن‌ها $s<s_0$ باشد. همچنین با توجه به رابطه‌ی (۱۴) برای مقادیر کوچک $a-\theta$، برآوردگرهای رده‌ی C با $s<s_0$ برآوردگر δ را مغلوب می‌کنند. از سوی دیگر، چون $R(a,\delta_s)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب s است، پس برای مقادیر کوچک $a-\theta$، برآوردگر δ_s، به‌ازای هر $s<s'$ برآوردگر $\delta_{s'}$ را مغلوب می‌کند. به هر حال، با استفاده از نتایج جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲) و با توجه به قضیه‌ی ۵ و اکیداً صعودی بودن $R(\theta,\delta_s)$ نسبت به θ، برای مقادیر $s\neq\frac{1}{\nu+1}$ و مقادیر به اندازه‌ی کافی بزرگ θ (که به s وابسته است)، برآوردگرهای δ و $\delta_{\frac{1}{\nu+1}}$ برآوردگر δ_s را مغلوب می‌کنند.

از مطالب بالا، نتیجه می‌شود که برای استفاده از هر یک از برآوردگرهای δ و $\delta_{\frac{1}{\nu+1}}$ لازم است به نکات زیر توجه شود:

آ) استفاده از δ دارای این برتری است که δ برآوردگر مینیماکس و پذیرفتنی پارامتر $a\leqslant\theta$ در رده‌ی تمام برآوردگرهای $\delta\geqslant a$ است، ولی عملکرد ضعیف آن برای مقادیر θ حول a و ساده نبودن شکل آن برای محاسبه از معایب این برآوردگر محسوب می‌شود.

ب) برآوردگر مینیماکس $\delta_{\frac{1}{\nu+1}}$ در رده‌ی تمام برآوردگرهای $\delta\geqslant a$ ناپذیرفتنی است اما عملکرد خوب این برآوردگر حول کران پایین a برای θ و نیز سادگی محاسبه‌ی این برآوردگر از مزیت‌های آن به شمار می‌رود.

مرجع‌ها

Bader, G.; Bischoff, W. (2003). Old and new aspects of minimax estimation of a bounded parameter. In Mathematical Statistics and Applications; Festschrift for Constance van Eeden. *IMS Lecture Notes and Monograph Series* **43**, 155-167. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.

Bischoff, W. (1992). Minimax and Γ -minimax estimation for functions of the bounded parameter of a scale parameter family under "Lp − loss". *Statist. Decisions* **10**, 45-61.

Brown, L.D. (1986). Fundamentals of statistical exponential families with applications in statistical decision theory. *Lecture Notes Monograph Series* **9**, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.

Charras, A.; van Eeden, C. (1994). Inadmissibility for squared error loss when the parameter to be estimated is restricted to the interval $[a,\infty)$. *Statist. Decisions* **12**, 257-266.

Eichenauer-Hermann, J.; Fieger, W. (1989). Minimax estimation in scale parameter families when the parameter interval is bounded. *Statist. Decision* **7**, 363-376.

Jafari Jozani, M.; Nematollahi, N.; Shafie, K. (2002). An admissible minimax estimator of a bounded scale-parameter in a subclass of the exponential family under scale-invariant squared error loss. *Statist. Probab. Lett.* **60**, 437-444.

Kaluszka, M. (1988). Minimax estimation of a class of functions of the scale parameter in the gamma and other distributions in the case of truncated parameter spaces. *Zastos. Mat.* **20**, 26-46.

Karlin, S. (1958). Admissibility for estimation with quadratic loss. *Ann. Math. Statist.* **29**, 406-436.

Lehmann, E. L.; Casella, G. (1998). *Theory of point estimation.* Wiley, New York.

Parsian, A.; Nematollahi, N. (1996). Estimation of scale parameter under entropy loss function. *J. Statist. Plann. Inference* **52**, 77-91.

Rahman, M. S.; Gupta, R. P. (1993). Family of transformed chi-square distributions. *Comm. Statist. Theory Methods.* **22**, 135-146.

Shao, P.; Strawderman, W. E. (1996). Improving on truncated linear estimates of exponential and gamma scale parameters. *Canad. J. Statist.* **24**, 105-114.

van Eeden, C. (1995). Minimax estimation of a lower bounded scale-paramerer of a Gamma distribution for scale-invariant squared-error loss. *Canad. J. Statist.* **23**, 245-256.

van Eeden, C. (2000). Minimax estimation of a lower bounded scale-paramerer of an F-distribution. *Statist. Probab. Lett.* **46**, 283-286.

van Eeden, C.; Zidek, J.V. (1994a). Group Bayes estimation of the exponential mean: A retrospective view of the wald theory, *In: Statistical Decision Theory and Related Topics* (eds S. S. Gupta and J. O. Berger, eds.), Springer-Verlag, pp. 35-49.

van Eeden, C.; Zidek, J.V. (1994b). Group-Bayes estimation of the exponential mean: A preposterior analysis, *Test* **3**, 125-143.

van Eeden, C.; Zidek, J.V. (1994c). Correction to Group-Bayes estimation of the exponential mean: A preposterior analysis, *Test* **3**, 247.

van Eeden, C.; Zidek, J. V. (1999). Minimax estimation of a bounded scale parameter for scale-invariant squared-error loss. *Statist. Decisions* **17**, 1-30.

پیوست

در این‌جا اثبات قضیه‌های ۴ و ۵ را می‌آوریم. امّا نخست لم‌های زیر را اثبات می‌کنیم.

لم ۲ برای خانواده‌ی توزیع‌های (۱) و تحت تابع زیان (۲)، به‌ازای هر $s > ۰$ و $a \geqslant \theta$ داریم:

$$\frac{d}{ds}R(\theta,\delta_s) \gtreqless ۰ \quad \Leftrightarrow \quad s\int_{\frac{a}{s\theta}}^{\infty} \exp(-t)t^{\nu+۱}\ dt \gtreqless \int_{\frac{a}{s\theta}}^{\infty} \exp(-t)t^{\nu}\ dt.$$

برهان. با توجه به تعریف $\delta_s \in C$ داریم:

$$\delta_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} a & T(\mathbf{x}) < \frac{a}{s}, \\ sT(\mathbf{x}) & T(\mathbf{x}) \geqslant \frac{a}{s}. \end{cases}$$

حال اگر $h(t;\theta)$ تابع چگالی احتمال گاما با پارامتر مقیاس θ و پارامتر شکل ν باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} R(\theta,\delta_s) &= E\left\{\left(\frac{\delta_s}{\theta}-۱\right)^{۲}\right\} \\ &= \int_{۰}^{\frac{a}{s}} \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^{۲} h(t;\theta)\ dt + \int_{\frac{a}{s}}^{\infty} \left(\frac{st}{\theta}-۱\right)^{۲} h(t;\theta)\ dt \\ &= \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^{۲} + \int_{\frac{a}{s}}^{\infty} \left\{\left(\frac{st}{\theta}-۱\right)^{۲} - \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^{۲}\right\} h(t;\theta)\ dt. \qquad (۱۵) \end{aligned}$$

بنا بر این،

$$\begin{aligned} R(\theta,\delta_s) = \left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^{۲} &+ s^{۲}\int_{\frac{a}{s}}^{\infty} \frac{t^{۲}}{\theta^{۲}} h(t;\theta)\ dt - ۲s\int_{\frac{a}{s}}^{\infty} \frac{t}{\theta} h(t;\theta)\ dt \\ &+ \left[۱-\left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^{۲}\right]\int_{\frac{a}{s}}^{\infty} h(t;\theta)\ dt. \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی بالا نسبت به s، لم بالا اثبات می‌شود.

لم ۳ اگر قرار دهیم

$$K(y) = \frac{\int_y^{\infty} t^{\nu}\exp(-t)\ dt}{\int_y^{\infty} t^{\nu+۱}\exp(-t)\ dt}, \qquad t \geqslant ۰, \qquad \nu > ۰$$

در این صورت تابع K در شرایط زیر صدق می‌کند:

آ) $K(\circ) = \frac{1}{\nu+1}$،

ب) $\lim_{y\to\infty} K(y) = \circ$ و $\lim_{y\to\infty} yK(y) = 1$،

پ) $K(y)$ تابعی اکیداً نزولی بر حسب y و $yK(y)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب y است.

برهان. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء، قسمت (آ) اثبات می‌شود و با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال قسمت (ب) به دست می‌آید. با مشتق‌گیری از $K(y)$ نسبت به y، اکیداً نزولی بودن $K(y)$ و با مشتق‌گیری از $yK(y)$ نسبت به y و استفاده از نابرابری شوارتس، اکیداً صعودی بودن $yK(y)$ اثبات می‌شود.

با استفاده از لم‌های ۲ و ۳، لم زیر را به‌راحتی می‌توان اثبات کرد.

لم ۴ به‌ازای هر $\theta \geqslant a > \circ$ یک $s(\theta)$ وجود دارد به‌طوری که

آ) $s \gtreqless s(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{ds}R(\theta,\delta_s) \gtreqless \circ$،

ب) $\circ < s(\theta) < \frac{1}{\nu+1}$،

پ) $s(\theta)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب θ است،

ت) $\lim_{\theta\to a} s(\theta) = \circ$ و $\lim_{\theta\to\infty} s(\theta) = \frac{1}{\nu+1}$،

همچنین

ث) $R(a,\delta_s)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب s است،

ج) به‌ازای هر $\frac{1}{\nu+1} > s > \circ$ یک $\theta(s) > a$ وجود دارد به قسمی که

$$R\left\{\theta(s),\delta_{\frac{1}{\nu+1}}\right\} < R\left\{\theta(s),\delta_s\right\}.$$

حال با استفاده از لم‌های بالا قضیه‌های ۴ و ۵ را اثبات می‌کنیم.

برهان قضیه‌ی ۴. با توجه به قسمت‌های (آ) و (ب) لم ۴، $R(\theta,\delta_s)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب s برای $s > s(\theta)$ است که $\circ < s(\theta) < \frac{1}{\nu+1}$. بنا بر این، به‌ازای هر $\frac{1}{\nu+1} \leqslant s < s'$ داریم:

$$R(\theta,\delta_s) < R(\theta,\delta_{s'}) \quad \forall\theta \geqslant a$$

پس δ_s بر $\delta_{s'}$ غلبه دارد. حال در دو مرحله نشان می‌دهیم که هر برآوردگر در رده‌ی C' یک برآوردگر پذیرفتنی در رده‌ی C است.

مرحله‌ی اول: ابتدا نشان می‌دهیم که هر برآوردگری که در رده‌ی C' پذیرفتنی باشد آن‌گاه در رده‌ی C نیز پذیرفتنی است. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. یعنی فرض کنید $\delta_s \in C'$ در رده‌ی C'

پذیرفتنی، و در رده‌ی C ناپذیرفتنی باشد. بنا بر این، یک $\delta^* \in C - C'$ وجود دارد که بر δ_s غلبه دارد. حال طبق قسمت اول قضیه، $\delta_{\frac{1}{\nu+1}}$ بر δ^* غلبه داشته و در نتیجه $\delta_{\frac{1}{\nu+1}} \in C'$ بر $\delta_s \in C'$ غلبه دارد که خلاف فرض است. پس اگر برآوردگری در رده‌ی C' پذیرفتنی باشد، آن‌گاه در رده‌ی C نیز پذیرفتنی است.

مرحله‌ی دوم: حال نشان می‌دهیم که هر برآوردگر در رده‌ی C'، یک برآوردگر پذیرفتنی در رده‌ی C' است. برای اثبات فرض کنید s' و s'' دو مقدار باشند که $\circ < s' \neq s'' \frac{1}{\nu+1}$ و دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

آ) فرض کنید $\circ < s' \neq s'' \leqslant \frac{1}{\nu+1}$. بنا بر این، طبق قسمت‌های (آ) تا (ت) لم ۴، یک $\theta_\circ(s') > a$ وجود دارد که $R\{\theta_\circ(s'), \delta_{s'}\} < R\{\theta_\circ(s'), \delta_{s''}\}$. این رابطه نشان می‌دهد $\delta_{s''}$ نمی‌تواند بر $\delta_{s'}$ غلبه داشته باشد. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که $\delta_{s'}$ نیز نمی‌تواند بر $\delta_{s''}$ غلبه داشته باشد.

ب) فرض کنید $\circ < s' \leqslant \frac{1}{\nu+1}$ و $s'' = \frac{1}{\nu+1}$. در این صورت، طبق قسمت (ث) لم ۴، $R(a, \delta_{s'}) < R\left(a, \delta_{\frac{1}{\nu+1}}\right)$ و بنا بر این، $\delta_{s''}$ نمی‌تواند بر $\delta_{s'}$ غلبه داشته باشد. همچنین، طبق قسمت (ج) لم ۴ یک $\theta(s') > a$ وجود دارد که $R\left\{\theta(s'), \delta_{\frac{1}{\nu+1}}\right\} < R\left\{\theta(s'), \delta_{s'}\right\}$ و بنا بر این، $\delta_{s'}$ نیز نمی‌تواند بر $\delta_{s''}$ غلبه داشته باشد.

با توجه به دو قسمت بالا نتیجه می‌شود که هر برآوردگر رده‌ی C' یک برآوردگر پذیرفتنی در رده‌ی C' است و طبق مرحله‌ی اول هر برآوردگر رده‌ی C' یک برآوردگر پذیرفتنی در رده‌ی C است.

برهان قضیه‌ی ۵. با توجه به نتایج جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۲) کافی است نشان دهیم که

$$\sup_{\theta \geqslant a} R(\theta, \delta_{\frac{1}{\nu+1}}) = \frac{1}{\nu + 1},$$

$$\sup_{\theta \geqslant a} R(\theta, \delta_s) > \frac{1}{\nu + 1}, \qquad s \neq \frac{1}{\nu + 1}.$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۵) داریم:

(۱۶)
$$R(\theta, \delta_s) = \left(\frac{a}{\theta} - 1\right)^2 + \int_{\frac{a}{s\theta}}^{\infty} \left\{(st-1)^2 - \left(\frac{a}{\theta} - 1\right)^2\right\} \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \exp\{-t\}\, dt.$$

بنا بر این، به‌ازای هر $s > ۰$ داریم:

$$\frac{d}{d\theta}R(\theta,\delta_s) = ۲\left(۱-\frac{a}{\theta}\right)\frac{a}{\theta^۲} + \frac{a}{s\theta^۲}\left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^۲\frac{۱}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{a}{s\theta}\right)^{\nu-۱}\exp\left\{-\frac{a}{s\theta}\right\}$$
$$-۲\left(۱-\frac{a}{\theta}\right)\frac{a}{\theta^۲}\int_{\frac{a}{s\theta}}^{\infty}\frac{۱}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-۱}\exp\{-t\}\ dt$$
$$-\left(\frac{a}{\theta}-۱\right)^۲\frac{a}{s\theta^۲}\frac{۱}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{a}{s\theta}\right)^{\nu-۱}\exp\left\{-\frac{a}{s\theta}\right\}$$
$$= ۲\left(۱-\frac{a}{\theta}\right)\frac{a}{\theta^۲}\left\{۱-\int_{\frac{a}{s\theta}}^{\infty}\frac{۱}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-۱}\exp\{-t\}dt\right\} > ۰. \qquad (۱۷)$$

بنا بر این، $R(\delta_s,\theta)$ تابعی اکیداً صعودی از θ است. همچنین با توجه به (۱۶) داریم:

$$\lim_{\theta\to\infty} R(\theta,\delta_s) = \int_۰^{\infty}(st-۱)^۲\frac{۱}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-۱}\exp\{-t\}\ dt$$
$$= \nu(\nu+۱)s^۲ - ۲\nu s + ۱$$
$$\geqslant \frac{۱}{\nu+۱}$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $s = \frac{۱}{\nu+۱}$ باشد، زیرا تابع $g(s) = \nu(\nu+۱)s^۲ - ۲\nu s + ۱$ فقط دارای یک نقطه‌ی مینیمم در $s = \frac{۱}{\nu+۱}$ است و مقدار مینیمم برابر $\frac{۱}{\nu+۱}$ است. بنا بر این،

$$\sup_{\theta\geqslant a} R(\theta,\delta_{\frac{۱}{\nu+۱}}) = \frac{۱}{\nu+۱},$$

$$\sup_{\theta\geqslant a} R(\theta,\delta_s) > \frac{۱}{\nu+۱}, \qquad s \neq \frac{۱}{\nu+۱}$$

و نتیجه به دست می‌آید.

دریافت: ۲۱ تیر ۱۳۸۴
آخرین اصلاح: ۱۱ مهر ۱۳۸۴

نادر نعمت‌الهی
گروه آمار، دانشکده‌ی اقتصاد،
دانشگاه علامه طباطبایی،
خیابان شهید بهشتی، نبش خیابان احمد قصیر،
تهران، ایران.
پیام‌نگار: na_nemat@yahoo.com

محمد جعفری جوزانی
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه شهید بهشتی،
بولوار دانشگاه، اوین،
تهران، ایران.
پیام‌نگار: m_jafari@cc.sbu.ac.ir