Statistical Research and Training Center
©(2005) J. Stat. Res. Iran **2** 69-92

مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
دوره‌ی ۲، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۸۴، صص ۱۵-۳۸
پژوهشکده آمار

ترتیب پراکندگی وسیستم‌های k-out-of-n

بهاءالدین خالدی

دانشگاه شهید بهشتی، دانشگاه رازی کرمانشاه

چکیده. ساده‌ترین و معمول‌ترین روش برای مقایسه‌ی دو متغیر تصادفی استفاده از میانگین‌ها و واریانس‌هاست. در بسیاری از حالت‌ها ممکن است میانه‌ی متغیر تصادفی X بزرگ‌تر از میانه‌ی متغیر تصادفی Y باشد در صورتی‌که میانگین X کوچک‌تر از میانگین Y است. مسئله‌ی مشابه وقتی اتفاق می‌افتد که هدف، مقایسه‌ی پراکندگی جامعه‌ها باشد. اگر X و Y بر طبق یک ترتیب تصادفی مناسب مرتب شده باشند ناهماهنگی بالا به‌وجود نمی‌آید. در بسیاری از حالت‌ها مقایسه‌ی مشخصاتِ تابعی از توزیع‌های احتمال تحت مطالعه، مانند توابع توزیع، توابع نرخ خطر، توابع میانگین باقیمانده، توابع معکوس یا توابع چندک و توابع مناسب دیگر بسیار مفیدتر از مقایسه بر اساس چند معیار عددی از توزیع‌هاست. مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی با استفاده از توابع یاد شده در بالا معمولاً ترتیبی جزئی میان توزیع‌های احتمال به‌وجود می‌آورد. این مقایسه‌ها را ترتیب تصادفی می‌نامیم. در این مقاله ضمن ارائه‌ی مفاهیم و قضیه‌های مرتبط با نظریه‌ی ترتیب پراکندگی، مثال‌ها و کاربردهایی از نظریه‌ی یاد شده ارائه می‌شود. به‌طور خاص به مقایسه‌ی تصادفی آماره‌های مرتب و فاصله‌ها با استفاده از نظریه‌ی بالا می‌پردازیم. همچنین حالت‌هایی که مشاهدات توزیع یکسان داشته باشند یا نه، مورد مطالعه قرار می‌گیرند و در بیش‌تر حالت‌ها فرض می‌کنیم که مشاهدات مستقل‌اند.

واژگان کلیدی. توزیع نمایی؛ ترتیب تصادفی معمول؛ ترتیب نرخ خطر؛ ترتیب نسبت درستنمایی؛ مدل‌های نرخ خطر متناسب؛ ترتیب بیشاندن؛ و p-بزرگ‌تر؛ تابع‌های شور؛ سیستم‌های k-out-of-n؛ فاصله‌ها.

۱ مقدمه

پدیده‌های تصادفی، اغلب پیچیده‌اند. مدل‌سازی آن‌ها و تعیین کران‌ها و تقریب‌ها برای مشخصه‌های مورد توجه و مهم آن مدل‌ها از دیدگاه کاربردی مهم و مفیدند. به‌عبارت دیگر، تقریبی از یک مدل تصادفی با استفاده از یک مدل ساده‌تر و یا به‌وسیله‌ی یک مدل که از مؤلفه‌های ساده تشکیل شده است می‌تواند کران‌ها و تقریب‌های مناسبی از برخی مشخصه‌های خاص و مطلوب مدل مورد مطالعه به‌دست دهد. ایده‌ی ترتیب تصادفی نخستین بار توسط لی‌من (۱۹۵۵) ارائه شد و با گذشت سال‌ها برای مقایسه توزیع‌های احتمال، چندین ترتیب تصادفی مختلف معرفی شده است. در این مقاله، توجه خود را بر ترتیب پراکندگی که یک ترتیب جزئی مفید برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال است معطوف می‌سازیم و چندین مثال از آماره‌ها که با ترتیب پراکندگی مرتب می‌شوند ارائه می‌کنیم.

ابتدا ترتیب‌های تصادفی مورد نیاز در این مقاله را مرور می‌کنیم. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع احتمال، تابع بقا و نرخ خرابی متغیرهای تصادفی X و Y را به‌ترتیب با f و g، F و G، $\overline{F}$ و $\overline{G}$، r_F و r_G نشان می‌دهیم. در سراسر این مقاله «صعودی» به معنای غیر نزولی و «نزولی» به معنای غیر صعودی است.

تعریف ۱ متغیر تصادفی Y در ترتیب تصادفی معمولی از X کوچک‌تر است ($Y \underset{st}{\leqslant} X$) اگر برای هر x داشته باشیم:

$$\overline{G}(x) \leqslant \overline{F}(x). \tag{۱}$$

از (۱) نتیجه می‌شود که برای هر $p \in (۰, ۱)$،

$$G^{-۱}(p) \leqslant F^{-۱}(p),$$

و به همین ترتیب برای هر تابع صعودی $\phi : R \to R$ که امید ریاضی آن نسبت به X و Y موجود باشد:

$$E\{\phi(Y)\} \leqslant E\{\phi(X)\}. \tag{۲}$$

یک نظریه‌ی قوی‌تر از ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر (hazard rate ordering) است.

تعریف ۲ می‌گوییم متغیر تصادفی Y در ترتیب نرخ خطر از X کوچک‌تر است ($Y \underset{hr}{\leqslant} X$) اگر

$$\frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} \tag{۳}$$

نسبت به x صعودی باشد.

فرض کنید X_t متغیر تصادفی توصیف کننده‌ی باقیمانده‌ی طول عمر یک متغیر تصادفی X در t به‌شرط $X > t$ باشد. به عبارت دیگر، X_t با $X - t|X > t$ هم‌توزیع است و دارای تابع بقای $\frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)}$ است. بنا بر این، $Y \underset{hr}{\leqslant} X$ اگر و فقط اگر برای هر $t > 0$، داشته باشیم $Y_t \underset{st}{\leqslant} X_t$.

به بیان دیگر، توزیع‌های شرطی، به‌شرط آن‌که متغیرهای تصادفی دست‌کم از یک اندازه‌ی معین هستند، طبق ترتیب تصادفی معمولی مرتب می‌شوند. در حالتی که نرخ‌های خطر موجود باشند، $Y \underset{hr}{\leqslant} X$ اگر و فقط اگر برای هر x، $r_F(x) \leqslant r_G(x)$. ترتیب بر اساس نرخ خطر به‌ترتیب تصادفی یکنواخت نیز مشهور است.

تعریف ۳ می‌گوییم متغیر تصادفی Y در ترتیب نسبت درستنمایی از X کوچک‌تر است ($Y \underset{lr}{\leqslant} X$) اگر $\frac{f(x)}{g(x)}$ نسبت به x صعودی باشد. هنگامی‌که تکیه‌گاه‌های X و Y دارای یک نقطه‌ی پایانی مشترک در سمت چپ هستند داریم:

$$Y \underset{lr}{\leqslant} X \quad \Rightarrow \quad Y \underset{hr}{\leqslant} X \quad \Rightarrow \quad Y \underset{st}{\leqslant} X.$$

برای جزئیات بیش‌تر به لی‌من و روهو (۱۹۹۲) مراجعه شود.

اکنون ترتیب تصادفی چندمتغیره میان دو بردار تصادفی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴ بردار تصادفی $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ در ترتیب تصادفی چندمتغیره کوچک‌تر از بردار تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ است ($\boldsymbol{Y} \overset{st}{\preccurlyeq} \boldsymbol{X}$) اگر برای هر تابع صعودی $\phi : R^n \to R$ داشته باشیم:

$$\phi(\boldsymbol{Y}) \underset{st}{\leqslant} \phi(\boldsymbol{X}).$$

ترتیب تصادفی چندمتغیره، ترتیب تصادفی مؤلفه به مؤلفه را نتیجه می‌دهد.

در این مقاله از مفهوم بیشاندن (majorization) نیز استفاده می‌شود که آن را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\{x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}\}$ نمایشگر ترتیب صعودی از مؤلفه‌های بردار $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ باشد. می‌گوییم بردار $\boldsymbol{x}$ بردار $\boldsymbol{y}$ را می‌بیشاند ($\boldsymbol{x} \overset{m}{\succcurlyeq} \boldsymbol{y}$) اگر برای هر j، $j = 1, 2, \ldots, n-1$، $\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}$ و $\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}$. تابعی که رابطه‌ی ترتیب بیشاندن را حفظ کند تابع محدب شور (schur convex) است. برای جزئیات بیش‌تر به مارشال و اولکین (۱۹۷۹) نگاه کنید. بردار $\boldsymbol{x}$ بردار $\boldsymbol{y}$ را به‌طور ضعیف می‌بیشاند ($\boldsymbol{x} \overset{w}{\succcurlyeq} \boldsymbol{y}$) اگر برای هر j، $j = 1, 2, \ldots, n$،

$$\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}.$$

بن و پالتانه (۱۹۹۹) به‌ترتیب تازه‌ای در $\mathbb{R}^{+n}$ پرداختند که آن را p-**بزرگ‌تر** (p-larger) نامیدند. بردار $\boldsymbol{x}$ در $\mathbb{R}^{+n}$، p-بزرگ‌تر از بردار $\boldsymbol{y}$ در $\mathbb{R}^{+n}$ است ($\boldsymbol{x} \overset{p}{\succcurlyeq} \boldsymbol{y}$) اگر برای هر j، $j = ۱, ۲, \ldots, n$،

$$\prod_{i=۱}^{j} x_{(j)} \leqslant \prod_{i=۱}^{j} y_{(j)}.$$

مارشال و الکین (۱۹۷۹) ثابت کرده‌اند که برای هر تابع مقعر g:

$$\boldsymbol{x} \overset{m}{\succcurlyeq} \boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad (g(x_۱), \ldots, g(x_n)) \overset{w}{\succcurlyeq} (g(y_۱), \ldots, g(y_n)),$$

و چون تابع لگاریتم یک تابع محدب است داریم:

$$\boldsymbol{x} \overset{m}{\succcurlyeq} \boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \overset{p}{\succcurlyeq} \boldsymbol{y},$$

که عکس آن برقرار نیست. برای مثال روشن است که $(۱, ۲, ۳) \overset{p}{\succcurlyeq} (۰/۲, ۱, ۵)$ ، ولی رابطه‌ی بیشاندن برقرار نیست.

یک مفهوم بنیادی برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال، ترتیب پراکندگی است که در زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵ می‌گوییم متغیر تصادفی Y در ترتیب پراکندگی از X کوچکتر است ($Y \leqslant X$) اگر

$$G^{-۱}(\beta) - G^{-۱}(\alpha) \leqslant F^{-۱}(\beta) - F^{-۱}(\alpha), \qquad ۰ < \alpha \leqslant \beta < ۱ \tag{۴}$$

همچنین در صورت وجود تابع‌های چگالی احتمال، $Y \underset{disp}{\leqslant} X$ اگر و فقط اگر برای هر $p \in (۰, ۱)$ داشته باشیم:

$$f(F^{-۱}(p)) \leqslant g(G^{-۱}(p)).$$

همچنین $Y \underset{disp}{\leqslant} X$، اگر و فقط اگر رابطه‌های هم‌ارز زیر برقرار باشند:

آ) $F^{-۱}G(x) - x$ نسبت به x صعودی باشد؛

ب) اگر توابع چگالی احتمال موجود باشند، برای هر $p \in (۰, ۱)$،

$$r_F(F^{-۱}(p)) \leqslant r_G(G^{-۱}(p)). \tag{۵}$$

ج) برای هر $p \in (۰, ۱)$،

$$Y_{G^{-۱}(p)} \underset{st}{\leqslant} X_{F^{-۱}(p)}.$$

داکسم (۱۹۶۹) وقتی روی کارایی آزمون‌های ناپارامتری کاملاً صحیح در حال مطالعه بود، این نوع ترتیب را ترتیب دنباله‌ای نامید. یاناگیموتو و سیبویا (۱۹۷۶) ثابت کردند اگر (۴) برقرار باشد X به‌طور تصادفی از Y پخش‌تر است. ساندرز و موران (۱۹۷۸)، بیکل و لی‌من (۱۹۷۹)، لوییس و تامپسون (۱۹۸۱) و شیکد (۱۹۸۲) این نوع ترتیب را به‌عنوان یک ترتیب تصادفی برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال مورد مطالعه قرار دادند. دشپانده و کوچار (۱۹۸۳) هم‌ارزی میان این مفاهیم را بررسی کرده‌اند و برخی ارتباطات موجود میان ترتیب پراکندگی و برخی دیگر از ترتیب‌های خاص را مورد توجه قرار داده‌اند. دشپانده و کوچار (۱۹۸۲) و دشپانده و متا (۱۹۸۲) از ترتیب پراکندگی در برخی از مسائل استنباطی برای به‌دست آوردن کران‌هایی برای کارایی آزمون‌ها و احتمال‌های انتخاب‌های صحیح استفاده کردند.

در ادامه به برخی از خاصیت‌های مهم ترتیب پراکندگی اشاره می‌شود.

خاصیت ۱. ترتیب پراکندگی نسبت به تغییرات مکانی پایدار است:

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow Y+c \underset{disp}{\leqslant} X+d \qquad \text{برای هر } c \text{ و } d \text{ حقیقی،}$$

خاصیت ۲. به‌ازای $\sigma > ۱$،

$$X \underset{disp}{\leqslant} \sigma X$$

خاصیت ۳.

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow -Y \underset{disp}{\leqslant} -X$$

خاصیت ۴. لوییس و تامپسون (۱۹۸۱) نشان داده‌اند که اگر Z متغیری تصادفی و مستقل از X و Y باشد و $Y \underset{disp}{\leqslant} X$ آن‌گاه $Y+Z \underset{disp}{\leqslant} X+Z$ اگر و فقط اگر Z دارای تابع چگالی لگ کاو (log-concave) باشد.

خاصیت ۵. اگر تکیه‌گاه‌های X و Y دارای نقطه‌ی چپ پایانی مشترک باشند، آن‌گاه

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow Y \underset{st}{\leqslant} X.$$

خاصیت ۶. روهو و هی (۱۹۹۱) نشان داده‌اند که اگر $Y \underset{disp}{\leqslant} X$ و $Y \underset{st}{\leqslant} X$، آن‌گاه به‌ازای هر تابع صعودی محدب و یا نزولی مقعر ϕ،

$$\phi(Y) \underset{disp}{\leqslant} \phi(X).$$

خاصیت ۷. به‌ازای هر تابع محدب ϕ،

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow E\{\phi(Y-E(Y))\} \leqslant E\{\phi(X-E(X))\},$$

به این شرط که امیدهای ریاضی موجود باشند. در حالت خاص از $X \underset{disp}{\leqslant} Y$ نتیجه می شود:

$$E|Y-E(Y)| \leqslant E|X-E(X)| \quad \text{و} \quad Var(Y) \leqslant Var(X).$$

برای جزئیات بیش‌تر درباره‌ی ترتیب‌های تصادفی یاد شده در بالا به فصل دوم بخش 2.B از شیکد و شانتیکومار (۱۹۹۴) رجوع شود.

با توجه به رابطه‌ی (۵)، رابطه‌ای اساسی و بنیادی میان ترتیب نرخ خطر و ترتیب پراکندگی وجود دارد، به‌طور واضح‌تر در نتیجه‌ی زیر که در باگای و کوچار (۱۹۸۶) آورده شده است این رابطه ارائه می‌شود.

قضیه‌ی ۱ با این فرض که X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی باشند:

آ) اگر $X \underset{hr}{\leqslant} Y$ و F یا G، نرخ خطر نزولی *(DFR)* باشند، آن‌گاه $X \underset{disp}{\leqslant} Y$؛

ب) اگر $X \underset{disp}{\leqslant} Y$ و F یا G نرخ خطر صعودی *(IFR)* باشند، آن‌گاه $X \underset{hr}{\leqslant} Y$.

گاهی به‌آسانی نمی‌توان ترتیب نرخ خطر یا ترتیب پراکندگی بین دو متغیر تصادفی را به طور مستقیم از تعریف‌هایشان برقرار کرد، در چنین مواقعی نتایج بالا می‌توانند برای اثبات برقراری ترتیب‌های بالا بین متغیرهای تصادفی بسیار سودمند باشند. در زیر مثال جالبی ارائه می‌شود.

مثال. فرض کنید X_γ متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکل صحیح γ باشد. برای $۱ \leqslant \gamma_۱ \leqslant \gamma_۲$ نشان می‌دهیم که

$$X_{\gamma_۱} \underset{disp}{\leqslant} X_{\gamma_۲} \quad \text{و} \quad X_{\gamma_۱} \underset{hr}{\leqslant} X_{\gamma_۲}.$$

می‌توان $X_{\gamma_۲}$ را به‌صورت $X_{\gamma_۱} + X_{\gamma_۲-\gamma_۱}$ نشان داد به‌طوری که $X_{\gamma_۲-\gamma_۱}$ متغیر تصادفی گامای مستقل از $X_{\gamma_۱}$ با پارامتر شکل $\gamma_۲ - \gamma_۱$ باشد که عددی صحیح است. علاوه بر این $X_{\gamma_۱}$، مجموع $\gamma_۱$تا متغیر تصادفی نمایی مستقل است که دارای توابع چگالی احتمال لگ کاو است. با توجه به خاصیت ۴:

$$X_{\gamma_۱} \underset{disp}{\leqslant} X_{\gamma_۲}. \tag{۶}$$

چون $X_{\gamma_۱}$ به‌ازای $\gamma_۱ \geqslant ۱$، IFR است باتوجه به قسمت ب) از قضیه‌ی ۱ و رابطه‌ی (۶) داریم $X_{\gamma_۱} \leqslant X_{\gamma_۲}$.

ساندرز و موران (۱۹۷۸) و شیکد (۱۹۸۲) نتایج بالا را برای متغیرهای تصادفی گاما با هر پارامتر شکل دلخواهی به‌کمک روش‌های تحلیلی پیچیده‌ای ثابت کردند. تکنیک زیر از ساندرز و موران (۱۹۷۸) برای برقرار ساختن ترتیب پراکندگی میان اعضای یک خانواده‌ی پارامتری از توزیع‌های احتمال بسیار سودمند است.

قضیه‌ی ۲ فرض کنید X_a متغیری تصادفی با تابع توزیع F_a برای هر $a \in \mathbb{R}$ باشد به‌طوری که

آ) F_a روی بازه‌ی $(x_-^{(a)}, x_+^{(a)}) \subseteq (\circ, \infty)$ معتبر بوده و f_a تابع چگالی احتمال آن روی هیچ‌یک از زیربازه‌های $(x_-^{(a)}, x_+^{(a)})$ صفر نباشد؛

ب) با در نظر گرفتن F'_a به‌عنوان مشتق F_a نسبت به a به‌شرط موجود بودن آن برای هر $a, a^* \in \mathbb{R}$ و $a > a^*$،

$$X_a \underset{disp}{\geqslant} X_{a^*}, \tag{۷}$$

اگر و فقط اگر،

$$\frac{F'_a(x)}{f_a(x)} \quad \text{نسبت به } x \text{ نزولی باشد.} \tag{۸}$$

احمد و همکاران (۱۹۸۶) رابطه‌های زیر را زبَرجمعی (super-additive) و ترتیب پراکندگی برای متغیرهای تصادفی نامنفی برقرار ساختند. G نسبت به F زبرجمعی نامیده می‌شود ($Y \underset{su}{\leqslant} X$) اگر برای هر x و y از دامنه‌ی G

$$F^{-1}G(x+y) \geqslant F^{-1}G(x) + F^{-1}G(y).$$

قضیه‌ی ۳ اگر $X \underset{su}{\leqslant} Y$ و $X \underset{st}{\leqslant} Y$، آن‌گاه $X \underset{disp}{\leqslant} Y$.

قضیه‌ی ۴ اگر $X \underset{su}{\leqslant} Y$ و $1 \leqslant \lim_{x \to \circ^+} \frac{F^{-1}G(x)}{x}$ آن‌گاه $X \underset{disp}{\leqslant} Y$.

پیش از این نیز رابطه‌های مشابهی میان ترتیب پراکندگی و دیگر ترتیب‌های جزئی عمرکردن، از قبیل ترتیبْ‌محدب (convex-ordering) و ترتیبْ‌ستاره (star-ordering) توسط دشپانده و کوچار (۱۹۸۳) ساته (۱۹۸۴) و بارتوزویچ (۱۹۸۵a و ۱۹۸۵b) به‌دست آمده بود. یکی از نتایج $X \underset{disp}{\leqslant} Y$ این است که $|Y_1 - Y_2|$ به‌طور تصادفی از $|X_1 - X_2|$ کوچک‌تر است که نتیجه می‌دهد:

$$E(|Y_1 - Y_2|) \leqslant E(|X_1 - X_2|) \quad \text{و} \quad \mathrm{Var(Y)} \leqslant \mathrm{Var(X)},$$

به‌طوری که X_1 و X_2 (Y_1 و Y_2) دو نمونه‌ی مستقل از X (Y) می‌باشند. بارتوزویچ (۱۹۸۶) این نتیجه را به فاصله‌های (spacings) یک نمونه‌ی تصادفی nتایی گسترش داد، چنانکه در زیر آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۵ فرض کنید $X_{1:n}$، ...، $X_{n:n}$ آماره‌های مرتب یک نمونه‌ی تصادفی X_1، ...، X_n از توزیع F باشند. همچنین $Y_{1:n}$، ...، $Y_{n:n}$ نیز آماره‌های مرتب از نمونه‌ی تصادفی Y_1، ...، Y_n از

توزیع G باشند، فاصله‌های متناظر را با $U_{i:n} \equiv X_{i:n} - X_{i-1:n}$ و $V_{i:n} \equiv Y_{i:n} - Y_{i-1:n}$ برای $i = 1, \ldots, n$ نمایش می‌دهیم به‌طوری که $X_{0:n} = Y_{0:n} \equiv 0$. بنا بر این:

$$Y \underset{disp}{\leqslant} X \Rightarrow (V_{1:n}, \ldots, V_{n:n}) \overset{st}{\preceq} (U_{1:n}, \ldots, U_{n:n}),$$

اما نتایجی که از قضیه‌ی ۵ گرفته می‌شود در زیر می‌آید.

نتیجه‌ی ۱ تحت شرایط قضیه‌ی ۵:

آ) برای $1 \leqslant i < j \leqslant n$، $Y_{j:n} - Y_{i:n} \underset{st}{\leqslant} X_{j:n} - X_{i:n}$ و در حالت خاص $Y_{n:n} - Y_{1:n} \underset{st}{\leqslant} X_{n:n} - X_{1:n}$؛

ب) $s_Y^2 \underset{st}{\leqslant} s_X^2$، که s_X^2 و s_Y^2 واریانس‌های نمونه‌ای هستند؛

ج) $\eta_Y \underset{st}{\leqslant} \eta_X$، که

$$\eta_X = \left[\binom{n}{2}\right]^{-1} \sum\sum_{i<j} |X_{j:n} - X_{i:n}|,$$

میانگین جینی برای نمونه‌ی X است و η_Y نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

برهان.

آ) با یافتن مجموع مؤلفه‌های متناظر بردارهای تصادفی $(U_{1:n}, \ldots, U_{n:n})$ و $(V_{1:n}, \ldots, V_{n:n})$ از $i + 1$ تا j و با استفاده از قضیه‌ی ۵ اثبات کامل است.

ب) با نمایش واریانس نمونه‌ای به‌صورت

$$\begin{aligned} s_X^2 &= \{n(n-1)\}^{-1} \sum\sum_{i<j} (X_{j:n} - X_{i:n})^2 \\ &= \{n(n-1)\}^{-1} \sum\sum_{i<j} (U_{j:n} + U_{j-1:n} + \cdots + U_{i+1:n})^2, \end{aligned}$$

که به‌روشنی تابعی صعودی از $(U_{1:n}, \ldots, U_{n:n})$ است و چون توابع صعودی از بردارهای تصادفی مرتب شده بر مبنای ترتیب تصادفی معمولی، خود بر مبنای همین ترتیب مرتبند، اثبات با توجه به قضیه‌ی ۵ کامل می‌شود.

ج) با توجه به اثبات قضیه‌ی قبل و ب) از نتیجه‌ی ۱، میانگین جینی را می‌توان به‌صورت تابعی صعودی از بردار فاصله‌ها نوشت.

در بخش ۲، نتایجی از ترتیب پراکندگی را میان آماره‌های مرتب متوالی که از یک توزیع DFR باشند، بیان می‌کنیم. به‌دلیل اهمیتِ ویژه‌ی سیستم‌های موازی در نظریه‌ی قابلیت اعتماد، در بخش ۳ صرفاً به مطالعه‌ی آن‌ها با مؤلفه‌های نمایی مستقل و غیرهم‌توزیع می‌پردازیم. همچنین به این می‌پردازیم که چگونه تغییر پارامترهای توزیع‌ها، روی طول عمر سیستم‌های موازی از دیدگاه‌های ترتیب پراکندگی و نرخ خطر تأثیر می‌گذارند و در ادامه نتایج را به مدل‌های نرخ خطر متناسب (PHR) تعمیم می‌دهیم. در بخش ۴ نیز به مطالعه‌ی ترتیب پراکندگی میان فاصله‌های نرمال شده از برخی خانواده‌ی توزیع‌ها می‌پردازیم.

۲ ترتیب پراکندگی میان آماره‌های مرتب

آماره‌های مرتب به‌طور کلی در آمار و به‌طور خاص در قابلیت اعتماد نقش مهمی بازی می‌کنند. زمان شکست یک سیستم k-out-of-n مطابق با $(n-k+۱)$امین آماره‌ی مرتب است. در حالت خاص، رخ دادن طول عمر یک سیستم موازی، مشابه بزرگ‌ترین آماره‌ی مرتب و رخ دادن طول عمر یک سیستم سری، مشابه کوچک‌ترین آماره‌ی مرتب است. سیستم‌های موازی و سری ساده‌ترین مثال‌ها از سیستم‌های منسجم (coherent) هستند که بدنه‌ی آن‌ها بیش‌تر سیستم‌های موازی پیچیده‌اند. برای حالتی که مؤلفه‌های چنین سیستم‌هایی دارای توزیع‌های احتمال مستقل و مشابه باشند مطالب بسیاری تحت بررسی قرارگرفته است. اما در زندگی واقعی، سیستم‌ها معمولاً از مؤلفه‌هایی تشکیل می‌شوند که طول عمرشان به‌طور مشابه توزیع نشده‌اند و بیش‌تر آن‌ها وابسته‌اند، مانند مؤلفه‌هایی که در یک محیط مشترک کار می‌کنند. چون نظریه‌ی توزیع چنین سیستم‌هایی کاملاً پیچیده است، نتایج کمی در حالت کلی در دسترس است.

در این بخش نتایجی از ترتیب پراکندگی میان آماره‌های مرتب که از توزیع‌هایی با نرخ خطر نزولی هستند، ارائه می‌شود.

برای هر i، $i=۱,\ldots,n$، $X_{i:n}$ را به‌عنوان iامین آماره‌ی مرتب از یک مجموعه‌ی nتایی متغیرهای تصادفی $X_۱$، ...، X_n در نظر می‌گیریم. احتیاجی نیست که X_iها مستقل یا هم‌توزیع باشند.

در حالتی که $X_۱$، ...، X_n، یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR باشند، دیوید و گرون‌ولد (۱۹۸۲) ثابت کردند که برای $۱ \leqslant i < j \leqslant n$، $\mathrm{var}(X_{i:n}) \leqslant \mathrm{var}(X_{j:n})$. کوچار (۱۹۹۶a) این نتیجه را به $X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{j:n}$ برای $۱ \leqslant i < j \leqslant n$ تعمیم داد. خالدی و کوچار (۲۰۰۰a) همین نتیجه را برای مقایسه آماره‌های مرتب نمونه‌های تصادفی با اندازه‌ی نمونه‌های نابرابر از توزیع‌های DFR تعمیم دادند.

قضیه‌ی ۶ فرض کنید $X_۱$، ...، X_n یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR باشد، بنا بر این برای $i \leqslant j$

و $n-i \geqslant m-j$ خواهیم داشت:

$$X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{j:m}. \qquad (۹)$$

برای اثبات این قضیه ابتدا به حالتی که توزیع مورد نظر نمایی باشد می‌پردازیم. بولاند و همکاران (۱۹۹۸) همین قضیه را در حالتی که اندازه نمونه‌ها برابر باشند ثابت کرده‌اند.

لم۱ فرض کنید $X_{i:n}$، iامین آماره‌ی مرتب از یک نمونه‌ی nتایی از توزیع نمایی با پارامتر λ باشد. در این صورت برای $i \leqslant j$ و $n-i \geqslant m-j$،

$$X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{j:m}. \qquad (۱۰)$$

برهان. فرض کنید X_1، ...، X_n و X'_1، ...، X'_m دو نمونه‌ی تصادفی nتایی و mتایی مستقل نمایی با نرخ خطر λ باشند. iامین آماره‌ی مرتب $X_{i:n}$ را می‌توان به‌صورت مجموعی از تفاضل‌های مکرر نوشت:

$$\begin{aligned} X_{i:n} &= (X_{i:n} - X_{i-1:n}) + \cdots + (X_{2:n} - X_{1:n}) + X_{1:n} \\ &\overset{st}{=} \sum_{k=1}^{i} E_{n-i+k}, \qquad (۱۱) \end{aligned}$$

به‌طوری که برای هر k، $k = 1, \ldots, i$، E_{n-i+k} یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ خطر $\lambda(n-i+k)$ است و همچنین به‌روشنی E_{n-i+k}ها از یکدیگر مستقل‌اند. به‌طور مشابهی برای $X'_{j:m}$ نیز داریم:

$$X'_{j:m} \overset{st}{=} \sum_{k=1}^{j} E'_{m-j+k}. \qquad (۱۲)$$

به‌طور مشابه برای هر k، $k = 1, \ldots, j$، E'_{m-j+k} یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ خطر $\lambda(m-j+k)$ است و همچنین به‌روشنی E'_{m-j+k}ها از یکدیگر مستقل‌اند. رابطه‌ی $E_{n-i+1} \underset{disp}{\leqslant} E'_{m-j+1}$ برای هر $n-i \geqslant m-j$ با استفاده از تعریف ترتیب پراکندگی برقرار است. از آن‌جا که رده‌ی توزیع‌هایی که دارای توابع چگالی احتمال با خاصیت لگ کاوی می‌باشند، دارای پیچش‌هایی هستند که دارای توابع چگالی احتمال لگ کاو می‌باشند (مراجعه نمایید به دارمادهیاکری و جاگ دف (۱۹۸۸)، ص ۱۷)، با به‌کارگیری مکرر خاصیت ۴ داریم:

$$\sum_{k=1}^{i} E_{n-i+k} \underset{disp}{\leqslant} \sum_{k=1}^{i} E'_{m-j+k}. \qquad (۱۳)$$

همچنین از آن‌جا که $\sum_{k=i+1}^{j} E'_{m-j+k}$، مجموع متغیرهای تصادفی نمایی مستقل دارای تابع چگالی احتمال با خاصیت لگ کاو و نیز از $\sum_{k=1}^{i} E'_{m-j+k}$ مستقل است، با پیروی از خاصیت ۴، برای هر $i \leqslant j$ طرف راست (۱۳) از $\sum_{k=1}^{j} E'_{m-j+k}$ کم پراکنده‌تر است. بنا بر این،

$$X_{i:n} \overset{disp}{=} \sum_{k=1}^{i} E_{n-i+k} \underset{disp}{\leqslant} \sum_{k=1}^{j} E'_{m-j+k} \overset{disp}{=} X'_{j:m}.$$

چون $X_{j:m}$ و $X'_{j:m}$ دارای یک توزیع‌اند، (۱۰) ثابت می‌شود.

برهان لم زیر در بارتوزویچ (۱۹۸۷) داده شده است.

لم ۲ فرض کنید $\phi : R^+ \to R^+$ تابعی باشد به‌طوری که $\phi(0) = 0$ و $\phi(x) - x$ صعودی باشد. در این صورت، برای هر تابع محدب و اکیداً صعودی $\psi : R^+ \to R^+$، تابع $\psi\phi\psi^{-1}(x) - x$ صعودی است.

اکنون برهانی برای قضیه‌ی ۶ ارائه می‌دهیم.

برهان. تابع توزیع $X_{j:m}$ عبارت است از $F_{j:m}(x) = B_{j:m}F(x)$ به‌طوری که $B_{j:m}$ دارای توزیع بتا با پارامترهای $(j, m-j+1)$ است. فرض کنید G تابع توزیع متغیر تصادفی نمایی با میانگین یک باشد. پس $H_{j:m}(x) = B_{j:m}G(x)$ تابع توزیع jامین آماره‌ی مرتب نمونه تصادفی به اندازه‌ی n از توزیع میانگین یکتای نمایی خواهد بود. همچنین می‌توانیم نشان دهیم که

$$F_{j:m}(x) = B_{j:m}GG^{-1}F(x) = H_{j:m}G^{-1}F(x). \qquad (۱۴)$$

برای اثبات، نشان می‌دهیم که برای $i \leqslant j$ و $n-i \geqslant m-j$،

$F^{-1}_{j:m}F_{i:n}(x) - x$ نسبت به x صعودی است اگر و فقط اگر $F^{-1}GH^{-1}_{j:m}H_{i:n}G^{-1}F(x) - x$ نسبت به x صعودی باشد. (۱۵)

با استفاده از لم ۱، برای $i \leqslant j$ و $n-i \geqslant m-j$، $H^{-1}_{j:m}H_{i:n}(x) - x$ نیز نسبت به x صعودی است.

همچنین تابع $\psi(x) = F^{-1}G(x)$ اکیداً صعودی و محدب است اگر F، DFR باشد. اکنون

نتیجه‌ی لازم از لم ۲ به‌دست می‌آید.

نکته. از قضیه‌ی ۶ نتیجه می‌شود که برای یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR به‌ازای هر i، $i = 1, \ldots, n$،

$$X_{i:n+1} \underset{disp}{\leqslant} X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{i+1:n+1}.$$

برای برقراری نتیجه‌ی بالا فرض DFR، بسیار مهم است. برای مثال می‌توان نشان داد که در حالت یک نمونه‌ی تصادفی دوتایی از توزیع یکنواخت$(0, 1)$ که DFR نیست، واریانس $X_{1:2}$ از واریانس $X_{2:2}$ کوچک‌تر نیست.

حال به مسئله‌ی مقایسه‌ی آماره‌های مرتب وقتی که مشاهدات مستقل و غیر هم‌توزیع باشند، می‌پردازیم. بولاند، النویهی و پروشان (۱۹۹۴) نشان دادند که اگر X_1، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند، برای $1 \leqslant i < j \leqslant n$، داریم $X_{i:n} \underset{hr}{\leqslant} X_{j:n}$. با استفاده از این و قضیه‌ی ۱ به قضیه‌ی زیر می‌رسیم.

قضیه‌ی ۷ اگر X_1، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل باشند آن‌گاه برای $1 \leqslant i < j \leqslant n$ داریم $X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{j:n}$ اگر $X_{i:n}$، DFR باشد.

حتا اگر نمونه‌ی ما از توزیع DFR باشد، ممکن است $X_{i:n}$ برای هر i، $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، DFR باشد. اما کوچک‌ترین آماره‌ی مرتب تحت این حالت همواره DFR است. این ادعا نتیجه‌ی این حقیقت است که نرخ خطر مؤلفه‌های مستقل یک سیستم سری مجموع نرخ خطر مؤلفه‌هاست. بنا بر این، اگر هر مؤلفه سیستم سری نرخ خطر نزولی داشته باشد، سیستم دارای خاصیت DFR است. از این مشاهده نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه‌ی ۲ فرض کنید X_1، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقل DFR باشند. در این صورت برای هر j، $1 < j \leqslant n$ داریم،

$$X_{1:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{j:n}.$$

از این نتیجه در می‌یابیم که در میان همه‌ی سیستم‌های k-out-of-n ساخته شده از مؤلفه‌ی مستقل DFR، سیستم سری کم پراکنده‌ترین است ولی بیش‌ترین نرخ خطر را دارد. ترتیب پراکندگی میان سیستم‌های سری از مؤلفه‌های DFR مستقل، وقتی تعداد مؤلفه‌ها مختلف هستند در قضیه‌ی زیر بیان شده است.

قضیه‌ی ۸ فرض کنید X_1، $\ldots$، X_{n+1} متغیرهای مستقل DFR باشند. در این صورت،

$$X_{1:n+1} \underset{disp}{\leqslant} X_{1:n}.$$

برهان. چون نرخ خطر $X_{1:n}$ کم‌تر از $X_{1:n+1}$ است و $X_{1:n}$ تحت شرایط مفروض دارای توزیع DFR است، از قضیه‌ی ۱ حکم قضیه، نتیجه می‌شود.

در قضیه‌ی بعد ترتیب پراکندگی را میان آماره‌های مرتب وقتی که نمونه‌های تصادفی از توزیع‌های مختلف گرفته شده باشند، توسعه می‌دهیم.

قضیه‌ی ۹ فرض کنید X_1، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع پیوسته‌ی F باشد و Y_1، ...، Y_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع پیوسته‌ی G باشد. اگر یکی از F یا G، DFR باشند، آن‌گاه برای $i \leqslant j$ و $n-i \geqslant m-j$،

$$X \underset{disp}{\leqslant} Y \Rightarrow X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} Y_{j:m}. \qquad (۱۶)$$

برهان. فرض کنید F، DFR باشد (اثبات در حالتی که G، DFR باشد مشابه است.) با استفاده از قضیه‌ی ۶ برای $i \leqslant j$ و $n-i \geqslant m-j$ داریم $X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} Y_{j:m}$. بارتوزویچ (۱۹۸۶) ثابت کرد که اگر $X \underset{disp}{\leqslant} Y$ آن‌گاه $X_{j:m} \underset{disp}{\leqslant} Y_{j:m}$. با ترکیب این نتایج، نتیجه‌ی مورد نظر ثابت می‌شود.

چون فرض $X \underset{hr}{\leqslant} Y$ به‌همراه شرط DFR بودن F یا G، رابطه‌ی $X \underset{disp}{\leqslant} Y$ را نتیجه می‌دهد، از قضیه‌ی بالا نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه‌ی ۳ فرض کنید X_1، ...، X_n نمونه‌ی تصادفی nتایی از توزیع پیوسته‌ی F و همچنین Y_1، ...، Y_m نمونه‌ی تصادفی mتایی از توزیع پیوسته‌ی G باشد. اگر یکی از توزیع‌های F یا G DFR باشند، آن‌گاه برای $i \leqslant j$ و $n-i \geqslant m-j$،

$$X \underset{hr}{\leqslant} Y \Rightarrow X_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} Y_{j:m}.$$

کوچار (1996b) نتیجه‌ای مشابه برای زمان‌های رخداد یک فرایند پواسون ناهمگن (یا به‌طور معادل برای مقادیر رکورد) با تابع چگالی احتمال نزولی به‌دست آورد. یکی از نتایج در زیر ارائه شده است.

قضیه‌ی ۱۰ فرض کنید $\{N(t), t \geqslant 0\}$ یک فرایند پواسون ناهمگن با تابع نرخ نزولی باشد و همچنین فرض کنید R_1، R_2، ... زمان‌های رخداد پیاپی باشند. در این صورت،

$$R_n \underset{disp}{\leqslant} R_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \text{ برای هر } n$$

۳ ترتیب تصادفی سیستم‌های موازی با مؤلفه‌های ناهمگن

توزیع نمایی نقش بسیار مهمی را در آمار بازی می‌کند. این توزیع به‌دلیل داشتن خاصیت بی‌حافظگی (non-aging) خواص جالبی دارد و اغلب کران‌های بسیار آسانی را برای احتمال‌های بقا و دیگر مشخصات مورد توجه سیستم‌های با مؤلفه‌های غیر نمایی به‌وجود می‌آورد. پلدگر و پروشان (۱۹۷۱) مسئله‌ی مقایسه‌ی تصادفی آماره‌های مرتب از متغیرهای تصادفی نمایی مستقل غیر هم‌توزیع را با آماره‌های متناظر با متغیرهای نمایی مستقل و هم‌توزیع مورد مطالعه قرار دادند. این موضوع توسط پژوهشگران بسیاری از جمله پروشان و ستورامان (۱۹۷۶)، بولاند ، النویهی و پروشان (۱۹۹۴)، دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷)، بولاند، شیکد و شانتیکومار (۱۹۹۸)، بن و پالتانه (۱۹۹۹) و خالدی و کوچار (۲۰۰۰a و ۲۰۰۰b) در میان دیگران مورد توجه و پیگیری قرارگرفت. در این بخش سیستم‌هایی موازی راکه از مؤلفه‌های غیر هم‌توزیع تشکیل شده‌اند از دیدگاه ترتیب پراکندگی و ترتیب نرخ خطر مورد مقایسه قرار می‌دهیم. ابتدا به حالتی که مؤلفه‌ها دارای توزیع‌های نمایی هستند می‌پردازیم و سپس نتایج را برای خانواده‌ی نرخ خطر متناسب گسترش می‌دهیم. پلدگر و ستورامان (۱۹۷۱) نتیجه‌ی زیر را ثابت کردند.

قضیه‌ی ۱۱ فرض کنید X_1، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نرخ خطر λ_i برای هر i، $i=1,\ldots,n$ است. فرض کنید X_1^*، ...، X_n^* مجموعه‌ی دیگری از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشد که X_i^* دارای نرخ خطر λ_i^* برای هر i، $i=1,\ldots,n$ است. آن‌گاه $\boldsymbol{\lambda} \overset{m}{\geqslant} \boldsymbol{\lambda}^*$ برای هر i، $i=2,\ldots,n$ نتیجه می‌دهد که

$$X_{1:n} \overset{st}{=} X_{1:n}^* \quad \text{و} \quad X_{i:n} \underset{st}{\geqslant} X_{i:n}^*. \tag{17}$$

پروشان و ستورامان (۱۹۷۶) این نتیجه را به‌ترتیب تصادفی چندمتغیره میان دو بردار از آماره‌های مرتب تعمیم دادند. آنان تحت شرایط قضیه‌ی بالا ثابت کردند که

$$(X_{1:n},\ldots,X_{n:n}) \overset{st}{\geqslant} (X_{1:n}^*,\ldots,X_{n:n}^*).$$

برای حالت خاص $n=2$ و $i=2$، بولاند، النویهی و پروشان (۱۹۹۴) به‌طور جزئی نتیجه‌ی بالا از پلدگر و پروشان (۱۹۷۱) را از ترتیب تصادفی به‌ترتیب نرخ خطر تعمیم دادند. نتیجه‌ی آن‌ها در زیر آمده است.

قضیه‌ی ۱۲ فرض کنید $r_{\lambda_1,\lambda_2}(t)$ نرخ خطر یک سیستم موازی از دو مؤلفه باشد که طول عمرآن‌ها متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ‌های خطر λ_1 و λ_2 هستند. در این صورت، $r_{\lambda_1,\lambda_2}(t)$ یک تابع

مقعر شور در $(\lambda_۱,\lambda_۲)$ است. بنا بر این $(\lambda_۱^*,\lambda_۲^*) \overset{m}{\succcurlyeq} (\lambda_۱,\lambda_۲)$ نتیجه می‌دهد:

$$X_{۲:۲} \underset{hr}{\geqslant} X^*_{۲:۲}.$$

بولاند، النویهی و پروشان (۱۹۹۴) با یک مثال نقض نشان دادند که قضیه‌ی ۱۱ را نمی‌توان به n دلخواه تعمیم داد. دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) ثابت کردند که نرخ خطر وارون $X_{n:n}$، طول عمر سیستم موازی از n مؤلفه‌ی نمایی مستقل، در $\boldsymbol{\lambda}$ محدب شور است.

مسئله‌ی طبیعی دیگر مقایسه‌ی $X_{n:n}$ با $Y_{n:n}$ است که $Y_۱$، ...، Y_n نمونه‌ی تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر $\bar{\lambda} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\lambda_i}{n}$ می‌باشد. دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) نتیجه‌ی زیر را ثابت کردند.

قضیه‌ی ۱۳ فرض کنید $X_۱$، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نرخ خطر λ_i برای i، $i=۱,\ldots,n$ و $Y_۱$، ...، Y_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر $\bar{\lambda}$ است. در این صورت،

$$Y_{n:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{n:n} \quad \text{و} \quad Y_{n:n} \underset{hr}{\leqslant} X_{n:n}. \tag{۱۸}$$

این نتایج کران پایینی برای واریانس $X_{n:n}$ و کران بالایی برای نرخ خطر $X_{n:n}$ ارائه می‌دهند.

جالب است که بدانیم آیا نتیجه‌ی بالا قابل تعمیم به آماره‌های مرتب دیگر می‌باشد؟ گرچه در حالت کلی پاسخ را نمی‌دانیم اما در قضیه‌ی بعدی می‌بینیم که نتیجه برای دومین آماره مرتب برقرار است.

قضیه‌ی ۱۴ فرض کنید $X_۱$، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نرخ خطر λ_i برای i، $i=۱,\ldots,n$ است و همچنین فرض کنید $Y_۱$، ...، Y_n نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر $\bar{\lambda}$ باشد. در این صورت

$$Y_{۲:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{۲:n}.$$

برهان. از قضیه‌ی ۳.۷ در کوچار و کروار (۱۹۹۶) نتیجه می‌شود که

$$Y_{۲:n} - Y_{۱:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{۲:n} - X_{۱:n} \quad \text{و} \quad X_{۱:n} \overset{st}{=} Y_{۱:n}. \tag{۱۹}$$

چون توزیع $X_{۱:n}(Y_{۱:n})$ لگ کاو است، با پیروی از خاصیت ۴،

$$Y_{۲:n} = (Y_{۲:n} - Y_{۱:n}) + Y_{۱:n} \underset{disp}{\leqslant} (X_{۲:n} - X_{۱:n}) + X_{۱:n} = X_{۲:n}. \tag{۲۰}$$

چون $X_{2:n}-X_{1:n}$ مستقل از $X_{1:n}$ و $Y_{2:n}-Y_{1:n}$ مستقل از $Y_{1:n}$ است، بنا بر این،

$$Y_{2:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{2:n}.$$

در قضیه‌ی زیر خالدی و کوچار (۲۰۰۰b) با جایگذاری $\tilde{\lambda}=\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda\right)^{\frac{1}{n}}$ به‌جای $\bar{\lambda}$، نشان دادند که نتایج قضیه‌ی ۱۳ همچنان برقرار است.

قضیه‌ی ۱۵ فرض کنید X_1، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که X_i دارای نرخ خطر λ_i برای i، $i=1,\ldots,n$ است. همچنین فرض کنید Z_1، ...، Z_n نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر $\tilde{\lambda}=\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda\right)^{\frac{1}{n}}$ باشد. در این صورت

$$Z_{n:n} \underset{disp}{\leqslant} X_{n:n} \quad \text{و} \quad Z_{n:n} \underset{hr}{\leqslant} X_{n:n}.$$

نتیجه‌ی ۴ تحت شرایط قضیه‌ی ۱۵،

آ) برای $r_{X_{n:n}}$ نرخ خطر $X_{n:n}$ داریم:

$$r_{X_{n:n}}(x;\boldsymbol{\lambda}) \leqslant \frac{n\tilde{\lambda}\left(1-\exp\{-\tilde{\lambda}x\}\right)^{n-1}\exp(-\tilde{\lambda}x)}{1-(1-\exp\{-\tilde{\lambda}x\})^{n}},$$

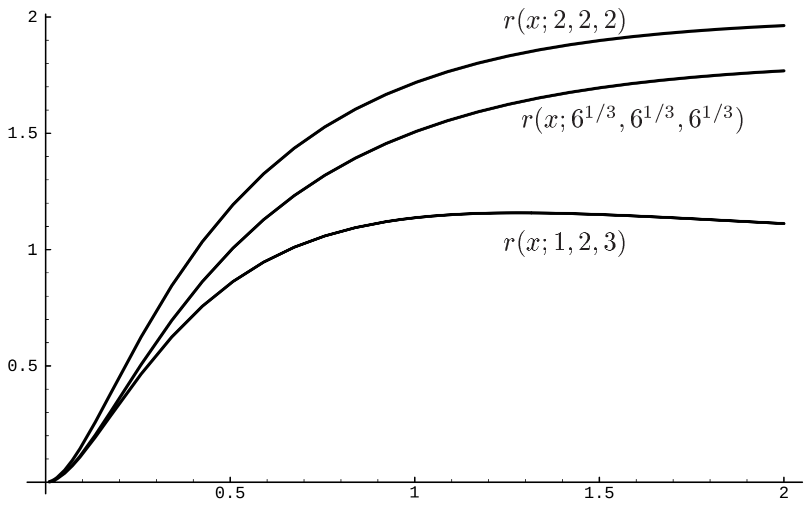
ب)

$$\operatorname{var}(X_{n:n};\boldsymbol{\lambda}) \geqslant \frac{1}{\tilde{\lambda}^{2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-i+1)^{2}}.$$

چون نرخ خطر $Y_{n:n}$ تابعی غیر نزولی از $\tilde{\lambda}$ است و این که میانگین هندسی λ_iها از میانگین حسابی آن‌ها کوچک‌تر است، کران‌های جدید حاصل از نتیجه‌ی ۴ بهتر از آن‌هایی است که توسط دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) به‌دست آمده‌اند.

در شکل‌های ۱ و ۲، نرخ‌های خطر سیستم‌های موازی سه مؤلفه‌ای نمایی را به همراه کران‌های بالای داده شده توسط دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) و همچنین توسط نتیجه‌ی ۴ را رسم کرده‌ایم.

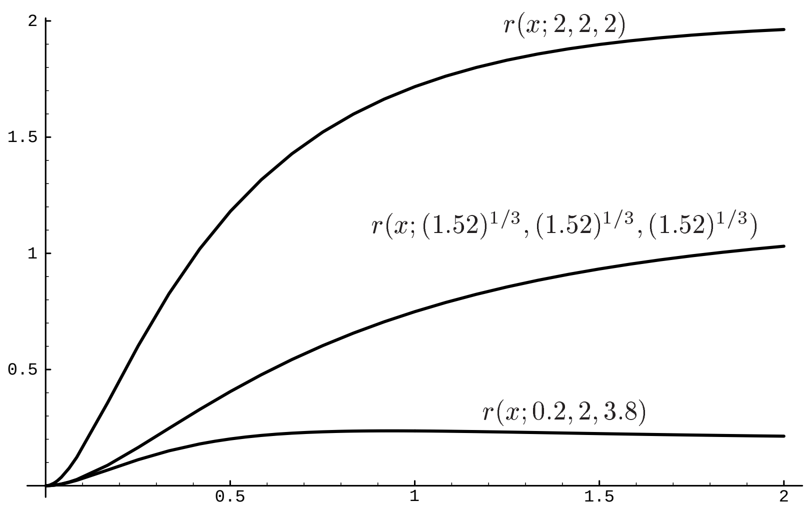
بردار پارامترها در شکل ۱، $\boldsymbol{\lambda}_1=(1,2,3)$ و در شکل ۲، $\boldsymbol{\lambda}_2=(0/2,2,3/8)$ است. همچنین توجه کنید که $\boldsymbol{\lambda}_1 \overset{m}{\succcurlyeq} \boldsymbol{\lambda}_2$.



شکل۱. نمودار نرخ خطر $X_{۲:۳}$

از شکل‌ها واضح است که با پراکنده‌تر شدن λ_iها از نظر بیشاندن، کران‌ها نسبتاً بهتر می‌شوند.

این پدیده به‌دلیل مقعر شور بودن میانگین هندسی است، و از طرفی میانگین حسابی ثابت شور (Schur-constant) است و نرخ خطر یک سیستم موازی متشکل از مؤلفه‌های نمایی مستقل و هم‌توزیع با نرخ خطر مشترک $\bar{\lambda}$، در $\bar{\lambda}$ صعودی است.



شکل۲. نمودار نرخ خطر $X_{۲:۳}$

۳٫۱ مدل نرخ خطر متناسب (PHR)

فرض کنید $\overline{F}$ تابع بقای یک متغیر تصادفی نامنفی X با نرخ خطر $h(\cdot)$ باشد. متغیرهای تصادفی مستقل X_1، ...، X_n از مدل نرخ خطر متناسب پیروی می‌کنند اگر X_i برای i، $i = 1, \ldots, n$، دارای نرخ خطر $\lambda_i h(\cdot)$ باشد. نتیجه‌ی قضیه‌ی ۱۵ قابل تعمیم به مدل PHR است که در زیر آورده شده است.

قضیه‌ی ۱۶ فرض کنید X_1، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند که X_i دارای نرخ خطر $\lambda_i h(\cdot)$ برای i، $i = 1, \ldots, n$ است، به‌طوری که $h(\cdot)$ نرخ خطر متغیر تصادفی نامنفی باشد. همچنین فرض کنید Y_1، ...، Y_n، یک نمونه‌ی تصادفی از یک توزیع با نرخ خطر مشترک $\tilde{\lambda} h(\cdot)$ باشد، به‌طوری که $\tilde{\lambda} = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda \right)^{\frac{1}{n}}$. در این صورت،

آ) $X_{n:n} \underset{hr}{\geqslant} Y_{n:n}$ و

ب) اگر F، DFR باشد، آن‌گاه $X_{n:n} \underset{disp}{\geqslant} Y_{n:n}$.

برهان.

آ) فرض کنید $H(x) = -\log \overline{F}(x)$ نشان‌دهنده‌ی نرخ خطر تجمعی F باشد و برای هر i، $i = 1, \ldots, n$، $Z_i = H(X_i)$ و $W_i = H(Y_i)$. چون X_iها از مدل PHR پیروی می‌کنند، به‌روشنی Z_iها نمایی با نرخ خطر λ_i و W_iها نیز نمایی با نرخ خطر $\tilde{\lambda}$ برای هر i، $i = 1, \ldots, n$ هستند. از قضیه‌ی ۱۵ داریم که $Z_{n:n} \underset{hr}{\geqslant} W_{n:n}$. با توجه به اینکه H^{-1}، معکوس راست H، غیر نزولی است، در این صورت $H^{-1}(Z_{n:n}) \underset{hr}{\geqslant} H^{-1}(W_{n:n})$ و قسمت آ) ثابت می‌شود.

ب) از قضیه‌ی ۱۵ به‌دست می‌آید که $Z_{n:n} \underset{disp}{\geqslant} W_{n:n}$ و همچنین $Z_{n:n} \underset{st}{\geqslant} W_{n:n}$. تابع $H^{-1}(x)$ غیر نزولی و محدب است، چون F غیر نزولی و DFR است. با استفاده از این‌ها، از خاصیت ۶ نتیجه می‌شود که $H^{-1}(Z_{n:n}) \underset{disp}{\geqslant} H^{-1}(W_{n:n})$ که معادل با $X_{n:n} \underset{disp}{\geqslant} Y_{n:n}$ است.

۴ ترتیب پراکندگی میان فاصله‌ها

فرض کنید $X_۱$، $\ldots$، X_n نمونه‌ی تصادفی از توزیع پیوسته با تابع توزیع احتمال F باشد و فرض کنید برای هر i، n ،$i = ۱, \ldots, n$ ،$D_{i:n} = (n - i + ۱)(X_{i:n} - X_{i-۱:n})$ iامین فاصله‌ی نرمال‌شده باشد که در آن $X_{۰:n} \equiv ۰$. متغیرهای تصادفی $D_{۱:n}$، $\ldots$، $D_{n:n}$ مستقل و هم‌توزیع‌اند اگر و فقط اگر F نمایی باشد. بارلو و پروشان (۱۹۶۶) ثابت کردند که اگر F، DFR (IFR) باشد، آنگاه فاصله‌های نرمال‌شده به‌طور تصادفی صعودی (نزولی) هستند. کوچار و کرمانی (۱۹۹۵) این نتیجه را برای حالتی که F، DFR است به‌ترتیب نرخ خطر تعمیم دادند. این نتیجه در زیر آمده است.

قضیه‌ی ۱۷ فرض کنید $X_۱$، $\ldots$، X_n، نمونه‌ای تصادفی از توزیعی DFR باشد. در این صورت،

آ) برای i، $i = ۱, \ldots, n - ۱$،

$$D_{i:n} \underset{hr}{\leqslant} D_{i+۱:n}.$$

ب) برای i ثابت و $i \leqslant n$،

$$D_{i:n+۱} \underset{hr}{\leqslant} D_{i:n}.$$

بارلو وپروشان (۱۹۶۶) نشان دادند که فاصله‌های متناظر با متغیرهای تصادفی DFR، مستقل و هم‌توزیع دارای توزیع DFR هستند. اثبات قضیه‌ی بعد متکی به رابطه‌ی میان ترتیب نرخ خطر و ترتیب پراکندگی و قضیه‌ی ۱۷ است.

قضیه‌ی ۱۸ فرض کنید $X_۱$، $\ldots$، X_n، نمونه‌ای تصادفی از توزیعی DFR باشد. در این صورت،

آ) برای هر i، $i = ۱, \ldots, n - ۱$،

$$D_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} D_{i+۱:n}.$$

ب) برای i ثابت و $i \leqslant n$،

$$D_{i:n+۱} \underset{disp}{\leqslant} D_{i:n}.$$

کوچار (1996c) نتایج مشابهی برای فاصله‌های زمانی رخدادهای متوالی (inter-occurrence) یک فرایند پواسون ناهمگن به‌دست آورد.

خالدی و کوچار (۱۹۹۹) نتیجه‌ی کلی زیر را که تعمیمی از قضایای ۱۷ و ۱۸ از مقایسه‌های مسائل دونمونه‌ای است اثبات نمودند.

قضیه‌ی ۱۹ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$، نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی نامنفی X با توزیع پیوسته‌ی F و $U_{i:n} = (n-i+1)(X_{i:n} - X_{i-1:n})$، iامین فاصله‌ی نرمال متناظر با X_iها باشد. همچنین فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_m$ نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی نامنفی Y با توزیع پیوسته‌ی G و $V_{j:m} = (m-j+1)(Y_{j:n} - Y_{j-1:m})$، jامین فاصله‌ی نرمال متناظر با Y_jها باشد. در این‌جا $X_{0:n} = Y_{0:m} \equiv 0$. اگر $X \underset{st}{\leqslant} Y$ و یا G، DFR باشد، آن‌گاه برای $i \leqslant j$ و $n-i \geqslant m-j$،

$$U_{i:n} \underset{disp}{\leqslant} V_{j:m}.$$

کوچار و کروار (۱۹۹۶) مسئله‌ی مقایسه‌ی فاصله‌های متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای مختلف ممکن را مورد مطالعه قرار دادند.

قضیه‌ی ۲۰ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند به‌طوری که برای هر i، $i = 1, \ldots, n$، X_i دارای توزیع نمایی با نرخ خطر λ_i و $D_{i:n}$، iامین فاصله‌ی نرمال شده برای هر i، $i = 1, \ldots, n$ باشد. همچنین فرض کنید $X_1^*, \ldots, X_n^*$ نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک $\overline{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n}$ و $D_{i:n}^*$ نیز iامین فاصله‌ی نرمال شده برای i، $i = 1, \ldots, n$ باشد. آن‌گاه

آ) برای $i = 2, \ldots, n$،

$$D_{i:n}^* \underset{disp}{\leqslant} D_{i:n},$$

ب)
$$(\lambda_1, \lambda_2) \succcurlyeq (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \Rightarrow D_{2:2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \underset{disp}{\leqslant} D_{2:2}(\lambda_1, \lambda_2).$$

کوچار و کروار (۱۹۹۶) حدس زدند که در حالت مستقل بودن متغیرهای نمایی با پارامترهای مختلف، برای $i = 1, \ldots, n-1$ رابطه‌ی $D_{i:n} \underset{hr}{\leqslant} D_{i+1:n}$ برقرار است. خالدی و کوچار (۲۰۰۱) آن را برای حالت خاصی که همه به‌جز یکی از پارامترها برابر باشند، ثابت کردند. بدین ترتیب آن‌ها در حالتی که $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda$ و $\lambda_n = \lambda^*$، حدس آن‌ها را ثابت کردند. به این حالت مدل نمایی تکْ دور افتاده با پارامتر (λ, λ^*) می‌گوییم.

قضیه‌ی ۲۱ (خالدی و کوچار (۲۰۰۱)) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ ، از مدل نمایی تکْ دور افتاده با پارامترهای (λ_1, λ_1^*) و $Y_1, \ldots, Y_n$، از مدلی نمایی تکْ دور افتاده با پارامترهای (λ_2, λ_2^*) باشد. اگر

$$\lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_2 < \lambda_1 \quad \text{و} \quad \lambda_1^* + (n-1)\lambda_1 = \lambda_2^* + (n-1)\lambda_2 \qquad (21)$$

آن‌گاه برای $i = 1, \ldots, n$،

$$D_{i:n}^{(1)} \underset{hr}{\geqslant} D_{i:n}^{(2)} \quad \text{و} \quad D_{i:n}^{(1)} \underset{disp}{\geqslant} D_{i:n}^{(2)},$$

به‌طوری که $D_{i:n}^{(1)}$ و $D_{i:n}^{(2)}$، به‌ترتیب فاصله‌های متناظر با مدل‌های نمایی تکْ دور افتاده با پارامترهای (λ_1, λ_1^*) و (λ_2, λ_2^*) هستند.

نکته. توجه کنید که از (۲۱) نتیجه می‌شود که

$$(\lambda_1^*, \lambda_1, \ldots, \lambda_1) \overset{m}{\succcurlyeq} (\lambda_2^*, \lambda_2, \ldots, \lambda_2).$$

قدردانی

نویسنده از داوران و سردبیرگرامی مجله برای توصیه‌های مفید آن‌ها تشکر می‌نماید. این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه شهید بهشتی-۶۰٫۴۱۷ انجام شده است.

مرجع‌ها

Ahmad. A.N.; Alizaid, A.; Bartoszewicz, J.; Kochar, S.C. (1986). Dispersive and supperadditive ordering. *Adv. in Appl. Probab.* **18**, 1019-1022.

Bagai, I.; Kochar, S.C. (1986). On tail ordering and comparison of failure rates. *Commun. Statist. Theory Methods* **15**, 1377-1388.

Barlow, R.E.; Proschan, F. (1966). Inequalities for linear combinations of order statistics from restricted families. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1574-1592.

Barlow, R.E.; Proschan, F. (1981). Statistical theory of reliability and life testing. To Begin With: Silver Spring, Maryland.

Bartoszewicz, J. (1985a). Moment Inequalities for order statistics from ordered families of distributions. *Metrika* **32**, 383-389.

Bartoszewicz, J. (1985b). Dispersive ordering and monotone failure rate distributions. *Adv. Appl. Probab.* **17**, 472-474.

Bartoszewicz, J. (1986). Dispersive ordering and the total time on test transformation. *Statist. Probab. Lett.* **6**, 13-16.

Bartoszewicz, J. (1987). A note on dispersive ordering defined by hazard functions. *Statist. Probab. Lett.* **6**, 13-17.

Bickel, P.J.; Lehmann, E.L. (1979). Descriptive statistics for nonparametric models. IV. Spread. In Contributions to Statistics. Jaroslav Hajek Memorial Volume, edited by Jena Jureckova, 33-40.

Boland, P.J.; El-Newihi, E.; Prochan, F. (1994). Schur properties of convolutions of exponential and geometric random variables. *J. Multivariate Anal.* **48**, 157-167.

Boland, P.J.; Shaked, M.; Shanthikumar, J.G. (1998). Stochastic ordering of order statistics. In N. Balakrishnan and C.R. Rao, eds, Handbook of statistics 16 - Order statistics: Applications. Elsevier, New York, 89-103.

Bon, J.L.; Paltanea, E. (1999). Ordering properties of convolutions of exponential random variables. *Lifetime Data Anal.* **5**, 185-192.

David, H.A.; Groenveld, R.A. (1982). Measures of local variation in a distribution: Expected lengths of spacings and variances of order statistics. *Biometrika* **69**, 227-232.

Deshpande, J.V.; Kochar, S.C. (1982). Some competitors of the Wilcoxon-Mann-Whitney test for the location alternative. *J. Indian Statist. Assoc.* **20**, 9-18.

Deshpande, J.V.; Kochar, S.C. (1983). Dispersive ordering is the same as tail ordering. *Adv. in Appl. Probab.* **15**, 686-687.

Deshpande, J.V.; Mehta, G.P. (1982). Inequality for the infimum of PCS for heavy tailed distributions. *J. Indian Statist. Assoc.* **19**, 19-25.

Dharmadhikari, S.; Joeg-dev, K. (1988). Unimodality, Convexity and Applications. Academic press, INC. New York, London.

Doksum, J. (1969). Star-shaped transformations and the power of rank test. *Ann. Math. Statist.* **40**, 1167-1176.

Dykstra, R.; Kochar. S.C.; Rojo, J. (1997). Stochastic comparisons of parallel systems of heterogeneous exponential components. *J. Statist. Plann. Inference* **65**, 203-211.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (1999). Stochastic orderings between distributions and their sample spacings-II. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 161-166.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (2000a). On dispersive ordering between order statistics in one-sample and two-sample problems. *Statist. Probab. Lett.* **46**, 257-261.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (2000b). Some new results on stochastic comparisons of parallel systems. *J. Appl. Probab.* **37**, 1123-1128.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (2001). Stochastic properties of spacings in a single-outlier exponential model. *Probab. in Engrg. Inform. Sci.* **15**, 401-408.

Kochar, S.C. (1996a). Dispersive ordering of order statistics. *Statist. Probab. Lett.* **27**, 271-274.

Kochar, S.C. (1996b). A note of dispersive ordering of record values. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* **46**, 63-67.

Kochar, S.C. (1996c). Some results on interarrival times of nonhomogeneous Poisson processes. *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **10**, 75-85.

Kochar, S.C. (1999). Stochastic orderings between distributions and their sample spacings. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 161-166.

Kochar, S.C.; Kirmani, S.N.U.A. (1995). Some new results on normalized spacings from restricted families of distributions. *J. Statist. Plann. Inference* **46**, 47-57.

Kochar, S.C.; Korwar, R. (1996). Stochastic orders for spacings of heterogeneous exponential random variables. *J. Multivariate Anal.* **57**, 69-83.

Kochar, S.C.; Rojo, J. (1996). Some new results on stochastic comparisons of spacings from heterogeneous exponential distributions. *J. Multivariate Anal.* **59**, 272-281.

Lehmann, E.L. (1955). Ordered families of distributions. *Ann. Math. Statist.* **26**, 399-419.

Lehmann, E.L.; Rojo, J. (1992). Invariant directional orderings. *Ann. Statist.* **20**, 2100-2110.

Lewis, T.; Thompson, J.W. (1981). Dispersive distribution and the connection between dispersivity and strong unimodality. *J. Appl. Probab.* **18**, 76-90.

Marshall, A.W.; Olkin, I. (1979). Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Academic Press, New York.

Pledger, P. And Proschan, F. (1971). Comparisons of order statistics and of spacings from heterogeneous distributions. In Optimizing Methods in statistics. Academic Press, New York, 89-113. ed. Rustagi, J.S.

Proschan, F.; Sethuraman, J. (1979). Stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous populations, with applications in reliability. *J. Multivariate Anal.* **6**, 608-616.

Rojo, J.; He, G.Z. (1991). New Properties and characterizations of dispersive ordering. *Statist. Probab. Lett.* **11**, 365-372.

Sathe, Y. (1984). Dispersive ordering of distributions. *Adv. in Appl. Probab.* **16**, 692.

Saunders, I.W.; Moran, P.A.P. (1978). On quantiles of the gamma and F distributions. *J. Appl. Probbb.* **15**, 426-432.

Shaked, M. (1982). Dispersive ordering of distributions. *J. Appl. Probbb.* **19**, 310-320.

Shaked, M.; Shanthikumar, J.G. (1994). Stochastic Orders and their Applications. Academic Press, San Diego, CA.

Yanagimoto, T.; Sibuya, M. (1976). Isotonic tests for spread and tail. *Ann. Inst. Statist. Math.* **28**, 329-342.

دریافت: ۲۷ مهر ۱۳۸۴
آخرین اصلاح: ۶ اردیبهشت ۱۳۸۵

بهاءالدین خالدی
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه شهید بهشتی،
تهران، ایران.
پیام‌نگار: $bkhaledi@hotmail.com$

گروه آمار، دانشکده‌ی علوم،
دانشگاه رازی،
کرمانشاه،
ایران.