

مروری بر شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار

مهدی فیروزی[†] و عادل محمدپور^{‡,*}

[†] دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

[‡] پژوهشکده‌ی آمار

چکیده. از آنجایی که به غیر از توزیع کوشی برای معکوس تابع توزیع یک متغیر تصادفی پایدار، فرم تحلیلی وجود ندارد، برای تولید عدد تصادفی از این توزیع‌ها نمی‌توان از روش تبدیل معکوس استفاده کرد. چمبرز و همکاران (۱۹۷۶) یک روش مستقیم را در حالت کلی برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار ارائه کردند. عدم اثبات روابط در مقاله‌ی چمبرز و همکاران (۱۹۷۶) و همچنین استفاده از نمایش‌های مختلف برای تابع مشخصه‌ی توزیع‌های پایدار در مقاله‌ها و نوشته‌های مختلف، باعث رخ دادن برخی ابهامات و اشتباهات در روابط و الگوریتم‌ها شده است. در این مقاله روابط ارائه‌شده برای شبیه‌سازی مستقیم متغیرهای تصادفی پایدار را بررسی کرده و ضمن مقایسه‌ی آن‌ها، ابهامات و اشتباهات رخ داده در برخی از آن‌ها را بیان و تصحیح خواهیم کرد. واژگان کلیدی. توزیع‌های پایدار؛ تابع مشخصه؛ شبیه‌سازی متغیر تصادفی.

۱ توزیع‌های پایدار

توزیع‌های پایدار در سال ۱۹۲۴ توسط پل لوی در مطالعه‌ی قضیه‌ی حد مرکزی تعمیم‌یافته مشخصه‌سازی شدند. این توزیع‌ها، توزیع‌های حدی مجموع‌های استاندارد شده‌ی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (با واریانس متناهی یا نامتناهی) هستند. این در حالی است که طبق قضیه‌ی حد مرکزی، مجموع‌های استاندارد شده‌ی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با واریانس متناهی به توزیع نرمال همگرا هستند.

*نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

از اینرو توزیع‌های پایدار شامل توزیع نرمال نیز می‌شوند. توزیع‌های پایدار به دلیل چولگی و داشتن جرم احتمال زیاد در دم‌های تابع چگالی، مدل‌های مناسبی برای بسیاری از پدیده‌ها در اقتصاد، مهندسی، فیزیک و هیدرولوژی هستند. قیمت سهام، زمان‌های اصابت در یک حرکت براونی، میدان گرانشی ستاره‌ها، نویز در یک سیستم مخابراتی، دمای یک رآکتور هسته‌ای، تنش در یک شبکه‌ی کریستالی مثال‌هایی از این سیستم‌ها هستند که توزیع‌های پایدار، توزیع‌های مناسبی برای مدل‌سازی آن‌ها هستند.

یک ویژگی مهم توزیع نرمال این است که مجموع دو متغیر تصادفی نرمال مستقل خود یک متغیر تصادفی نرمال است، یعنی اگر X یک متغیر تصادفی نرمال باشد آنگاه برای کپی‌های مستقل X_1 و X_2 از X و هر A و B مثبت، C مثبت و $D \in R$ وجود دارند که

$$(1) \quad AX_1 + BX_2 \sim CX + D,$$

که « \sim » علامت برابری در توزیع است. توزیع‌های پایدار، کلاسی از توزیع‌ها با این ویژگی هستند.

تعریف ۱. متغیر تصادفی X توزیع پایدار دارد، اگر برای هر A و B مثبت و کپی‌های مستقل X_1 و X_2 از X رابطه‌ی (۱) به ازای C مثبت و $D \in R$ برقرار باشد (نولان، ۲۰۱۰، ص. ۴).

توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی پایدار وجود دارند و پیوسته هستند، اما به جز در سه حالت خاص (نرمال، لوی و کوشی) فرم تحلیلی ندارند. لذا برای بررسی این توزیع‌ها از توابع مشخصه‌ی آن‌ها استفاده می‌شود. یک تعریف معادل با تعریف ۱ برای متغیر تصادفی پایدار بر مبنای تابع مشخصه، به صورت زیر است:

تعریف ۲. متغیر تصادفی X توزیع پایدار دارد، اگر و تنها اگر تابع مشخصه‌ی آن به صورت زیر باشد:

$$(2) \quad \phi_X(t) = \begin{cases} \exp[-\gamma^\alpha |t|^\alpha \{1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{4}\} + i\delta t], & \alpha \neq 1, \\ \exp[-\gamma |t| \{1 + i\beta \frac{1}{\pi} \text{sign}(t) \log |t|\} + i\delta t], & \alpha = 1, \end{cases}$$

که

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases}$$

$\alpha \in (0, 2]$ ، $-1 \leq \beta \leq 1$ ، $\gamma > 0$ ، و $\delta \in R$ است.

α شاخص پایداری، β پارامتر چولگی، γ پارامتر مقیاس و δ پارامتر مکان نامیده می‌شوند. متغیر تصادفی پایدار X با شاخص پایداری α را α -پایدار می‌نامیم. توزیع پایدار با تابع مشخصه (2) را با نماد $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ نشان می‌دهیم و آنرا نمایش ۱ می‌نامیم. اگر $\gamma = 1$ و $\delta = 0$ باشد آنگاه می‌گوییم توزیع استاندارد است و به اختصار با $S(\alpha, \beta; 1)$ نمایش می‌دهیم (نولان، ۲۰۱۰، ص. ۸).

نمایش دیگری از تابع مشخصه معادل با نمایش ۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳. متغیر تصادفی X توزیع پایدار دارد اگر و تنها اگر تابع مشخصه آن به صورت زیر باشد:

$$(3) \quad \phi_X(t) = \begin{cases} \exp[-\gamma^\alpha |t|^\alpha \exp\{-i\beta\gamma \text{sing}(t) \frac{\pi}{\alpha} K(\alpha)\} + i\delta t], & \alpha \neq 1, \\ \exp[-\gamma_2 |t| \{\frac{\pi}{\alpha} + i\beta\gamma \text{sign}(t) \log |t|\} + i\delta t], & \alpha = 1, \end{cases}$$

که

$$K(\alpha) = \alpha - 1 + \text{sing}(1 - \alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha < 1, \\ \alpha - 2, & \alpha > 1, \end{cases}$$

و می‌نویسیم $X \sim S(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta; 2)$ و آن را نمایش ۲ می‌نامیم. اگر $\gamma_2 = 1$ و $\delta = 0$ باشد آنگاه می‌گوییم توزیع استاندارد است و به اختصار با $S(\alpha, \beta_2; 2)$ نمایش می‌دهیم (ورون، ۱۹۹۶، ص. ۱۶۶).

پارامترهای β_2 و γ_2 در نمایش ۲، با استفاده از روابط زیر با پارامترهای β و γ در نمایش ۱ در ارتباط هستند (سامورادنیسکی و تاکو، ۱۹۹۴، فصل ۱).

• اگر $\alpha \neq 1$ ، در این صورت

$$(4) \quad \tan \left\{ \beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{\alpha} \right\} = \beta \tan \frac{\pi \alpha}{\alpha},$$

$$(5) \quad \gamma_2 = \gamma \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi \alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

• اگر $\alpha = 1$ ، در این صورت

$$(6) \quad \beta_2 = \beta, \quad \gamma_2 = \frac{2}{\pi} \gamma.$$

۲ شبیه‌سازی

از آنجایی که توابع چگالی، توزیع و چندک‌های توزیع‌های پایدار فرم تحلیلی ندارند، شبیه‌سازی توزیع‌های پایدار برای تقریب این توابع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از سوی دیگر استواری روش‌های آماری نسبت به داده‌های پایدار (دم کلفت) و تصادفی بودن داده‌های پایدار مشاهده شده را می‌توان با شبیه‌سازی داده‌هایی از اینگونه توزیع‌ها آموخت. همچنین از آنجایی که توزیع‌های پایدار چند متغیره تشکیل یک خانواده‌ی نیمه‌پارامتری را می‌دهند مسئله‌ی شبیه‌سازی در این حالت بسیار پیچیده‌تر از حالت یک متغیره است. شبیه‌سازی بردارهای تصادفی پایدار صرفاً با استفاده از تقریب‌های ارایه‌شده برای اندازه‌ی طیفی بردارهای تصادفی پایدار و شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار امکان‌پذیر است.

نخستین بار کانتر (۱۹۷۵) روشی را برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار مثبت ($0 < \alpha < 1$)
 $(\beta = 1)$ ارایه داد. این روش بر اساس نمایش انتگرالی ابراگیموف و چرنین (۱۹۵۹) برای تابع چگالی احتمال پایدار مثبت بود. نمایش انتگرالی ابراگیموف و چرنین به صورت زیر است. اگر $X \sim S(\alpha, 1; 1)$ باشد آنگاه برای $x > 0$

$$(۷) \quad P(X \leq x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp \left\{ -x^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} a(\theta) \right\} d\theta, \quad 0 < \alpha < 1,$$

که

$$a(\theta) = \frac{\sin \{ (1 - \alpha)\theta \} (\sin \alpha\theta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{(\sin \theta)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

کانتر از (۷) نتیجه گرفت که اگر Θ یک متغیر تصادفی یکنواخت روی $(0, \pi)$ و W متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱ و مستقل از Θ باشد، آنگاه

$$X = \left\{ \frac{a(\theta)}{W} \right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

در این حالت برای شبیه‌سازی یک متغیر تصادفی $S(\alpha, \beta; 1)$ با $0 < \alpha < 1$ ، ابتدا لازم است که دو متغیر تصادفی $S(\alpha, 1; 1)$ تولید کرده و سپس با استفاده از گزاره‌ی زیر آن‌ها را به یک متغیر تصادفی پایدار استاندارد تبدیل کنیم.

گزاره‌ی ۱. اگر X توزیع $S(\alpha, \beta; 1)$ داشته باشد که $\alpha < 2$ است، آنگاه متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع Y_1 و Y_2 با توزیع $S(\alpha, 1; 1)$ وجود دارند، به طوری که

$$X \sim \left(\frac{1 + \beta}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_1 - \left(\frac{1 - \beta}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_2.$$

برهان. سامورادنیسکی و تاکو (۱۹۹۴، ص. ۱۶).

کانتر برای حالت $1 \leq \alpha < 2$ روشی را ارایه نکرد. همچنین در روش او برای تولید هر متغیر تصادفی پایدار استاندارد به دو متغیر تصادفی $S(\alpha, 1; 1)$ نیاز است، که این باعث افزایش هزینه‌ی شبیه‌سازی می‌شود.

با کمک گزاره‌های زیر که از (۲) و (۳) نتیجه می‌شوند می‌توان متغیرهای تصادفی پایدار استاندارد از نمایش‌های ۱ و ۲ را به ترتیب به متغیرهای تصادفی پایدار $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ و $S(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta; 2)$ تبدیل کرد.

گزاره‌ی ۲. اگر X توزیع $S(\alpha, \beta; 1)$ داشته باشد آنگاه

$$Y = \begin{cases} \gamma X + \delta, & \alpha \neq 1, \\ \gamma X + \gamma^{\frac{1}{\alpha}} \beta \log \gamma + \delta, & \alpha = 1, \end{cases}$$

توزیع $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ دارد.

برهان. سامورادنیسکی و تاکو (۱۹۹۴)، ص. ۴۳.

گزاره‌ی ۳. اگر X توزیع $S(\alpha, \beta_2; 2)$ داشته باشد آنگاه

$$Y = \begin{cases} \gamma_2 X + \delta, & \alpha \neq 1, \\ \gamma_2 X + \beta_2 \gamma_2 \log \gamma_2 + \delta, & \alpha = 1, \end{cases}$$

توزیع $S(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta; 2)$ دارد.

برهان. فیروزی (۱۳۸۸)، ص. ۷۷.

چمبرز و همکاران (۱۹۷۶) بر اساس نمایش انتگرالی زولاتاریف (۱۹۶۶) برای تابع چگالی احتمال پایدار در حالت کلی و با در نظر گرفتن یک نمایش معادل با نمایش‌های ۱ و ۲ روش کانتر را به حالت کلی که $0 < \alpha \leq 2$ و $-1 \leq \beta \leq 1$ است، تعمیم داده‌اند. آن‌ها از فرم استاندارد شده‌ی نمایش زیر استفاده کردند.

$$(۸) \quad \phi_X(t) = \begin{cases} \exp[-\gamma^\alpha |t|^\alpha \exp\{-i\beta \gamma \sin(t) \frac{\pi}{\alpha} K(\alpha)\} + i\delta t], & \alpha \neq 1, \\ \exp[-\gamma |t| \{1 + i\beta \frac{\pi}{\alpha} \sin(t) \log |t|\} + i\delta t], & \alpha = 1. \end{cases}$$

چمبرز و همکاران (۱۹۷۶) روابط زیر را برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار استاندارد ارائه کردند.

$$(۹) \quad X \stackrel{d}{=} \frac{\sin \alpha(\phi - \phi_0)}{(\cos \phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{\phi - \alpha(\phi - \phi_0)\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \sim S(\alpha, \beta_2; 2), \quad \alpha \neq 1,$$

$$(۱۰) \quad X \stackrel{d}{=} \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \beta\phi \right) \tan \phi - \beta \log \left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos \phi}{\frac{\pi}{2} + \beta\phi} \right) \right\} \sim S(1, \beta; 1), \quad \alpha = 1,$$

که $\phi_0 = -\frac{\pi}{2} \beta_2 \frac{K(\alpha)}{\alpha}$ و W مستقل از ϕ ، توزیع نمایی با میانگین ۱ دارد.

چمبرز و همکاران (۱۹۷۶) اثباتی برای این روابط ارائه نکردند و تنها به مقاله‌ی زولتاریف (۱۹۶۶) ارجاع دادند. عدم اثبات روابط باعث ایجاد برخی ابهامات در مقاله شد. سامورادنیسکی و تاکو (۱۹۹۴) روابط (۹) و (۱۰) را تنها در حالتی که توزیع متقارن است، ثابت کردند. در این بخش می‌خواهیم این روابط را با جزئیات بیشتری بررسی کنیم.

روابط (۹) و (۱۰) به ترتیب برحسب نمایش‌های ۲ و ۱ تابع مشخصه که در تعاریف ۳ و ۲ ذکر شده‌اند ارائه گردیده‌اند. ورون (۱۹۹۶) این نتایج را در قضیه‌ی زیر در یک نمایش واحد ارائه و اثبات کرد.

قضیه‌ی ۱ فرض کنید ϕ توزیع یکنواخت روی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و W مستقل از ϕ ، توزیع نمایی با میانگین ۱ داشته باشد. آنگاه

۱. برای $\alpha \neq 1$

$$(۱۱) \quad X \stackrel{d}{=} \frac{\sin \alpha(\phi - \phi_0)}{(\cos \phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{\phi - \alpha(\phi - \phi_0)\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \sim S(\alpha, \beta_2; 2),$$

۲. برای $\alpha = 1$

$$(۱۲) \quad X \stackrel{d}{=} \left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 \phi \right) \tan \phi - \beta_2 \log \left(\frac{W \cos \phi}{\frac{\pi}{2} + \beta_2 \phi} \right) \sim S(1, \beta_2; 2).$$

که $\phi_0 = -\frac{\pi}{2} \beta_2 \frac{K(\alpha)}{\alpha}$

برهان. ورون (۱۹۹۶)، قضیه ۱.۳، ص. ۱۶۹.

روابط (۹) و (۱۰) تنها روابطی هستند که برای شبیه‌سازی مستقیم متغیرهای تصادفی پایدار در حالت کلی ($0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1$) ارائه شده‌اند. تنها در چند حالت خاص روش‌های دیگری معرفی

شده‌اند که با روش فوق معادل‌اند. از سوی دیگر روش‌هایی که برای افزایش دقت روش مستقیم ارایه شده است نسبت به این روش سرعت کمتری دارند (لکاردی، ۲۰۰۵، و پوپا، ۲۰۰۵).

۲/۱ بررسی روابط در حالت $\alpha \neq 1$

در حالت $\alpha \neq 1$ نمایش تابع مشخصه‌ای که چمبرز و همکاران (۱۹۷۶) استفاده کردند با نمایش‌های توابع مشخصه‌ی B در اچاکین و زولاتاریف (۱۹۹۹)، ورون (۱۹۹۶)، (رابطه‌ی (۵.۲)، ص. ۱۶۶) و نمایش ۲ تعریف‌شده در بخش ۱ معادل است، و رابطه‌ی (۹) با روابط شبیه‌سازی در اچاکین و زولاتاریف (۱۹۹۹)، ورون (۱۹۹۶)، (به ترتیب (۱.۲.۸)، ص. ۲۱۶ و رابطه‌ی (۲.۳)، ص. ۱۶۹) و (۱۱) یکسان شده است. (در اچاکین و زولاتاریف، ۱۹۹۹، ص. ۲۱۶، قرار دهید $\phi_0 = -\varphi_0$).

نولان (۲۰۱۰) بر اساس نمایش ۱ تابع مشخصه، رابطه‌ی زیر را برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار استاندارد در حالت $\alpha \neq 1$ ارائه کرد.

$$(13) \quad X \stackrel{d}{=} \frac{\sin \alpha(\phi + \theta_0)}{(\cos \alpha\theta_0 \cos \phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{\alpha\theta_0 + (\alpha - 1)\phi\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \sim S(\alpha, \beta; 1), \quad \alpha \neq 1,$$

که $\theta_0 = \arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{4})/\alpha$ است و ϕ و W مانند قبل‌اند.

ورون (۱۹۹۶) رابطه‌ی دیگری را بر اساس نمایش ۱ تابع مشخصه، از (۹) نتیجه گرفت. این رابطه به‌صورت زیر است:

$$(14) \quad X \stackrel{d}{=} \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{4} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\sin \alpha(\phi + \theta_0)}{(\cos \phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{\phi - \alpha(\phi + \theta_0)\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \sim S(\alpha, \beta; 1), \quad \alpha \neq 1.$$

حال دو رابطه‌ی (۱۳) و (۱۴) را با هم مقایسه می‌کنیم، از (۴) داریم

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + \beta^2 \tan^2 \left(\frac{\pi\alpha}{4} \right) \right\}^{\frac{1}{\alpha}} &= \left\{ 1 + \tan^2 \left(\frac{\beta\pi K(\alpha)}{4} \right) \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left\{ \cos \left(\frac{\beta\pi K(\alpha)}{4} \right) \right\}^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= (\cos \alpha\theta_0)^{-\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

و همچنین $[\phi - \alpha(\phi + \theta_0)] = -\alpha\theta_0 + (\alpha - 1)\phi$ و چون \cos یک تابع زوج است، پس (۱۳) و (۱۴) یکسان هستند. حال نشان می‌دهیم که (۱۳) و (۱۴) با روابط چمبرز و همکاران (۱۹۷۶)، اچاکین و زولاتاریف (۱۹۹۹) و (۱۱) که بر اساس نمایش ۲ تابع مشخصه، درحالت $\alpha \neq 1$ هستند، معادل‌اند. از (۴) داریم:

$$\beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{2} = \arctan \left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} \beta_2 \frac{K(\alpha)}{\alpha} = \frac{\arctan \left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right)}{\alpha}$$

$$(15) \quad \Rightarrow \theta_0 = -\phi_0.$$

حال از روابط (۵)، (۱۵) و گزاره‌ی ۲ نتیجه می‌شود، اگر

$$X \stackrel{d}{=} \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \frac{\sin \alpha(\phi + \theta_0)}{(\cos \phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{\phi - \alpha(\phi + \theta_0)\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \sim S(\alpha, \beta; 1),$$

آنگاه

$$Y = \gamma X + \delta$$

$$\stackrel{d}{=} \gamma \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma} \cdot \frac{\sin \alpha(\phi - \phi_0)}{(\cos \phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{\phi - \alpha(\phi - \phi_0)\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} + \delta \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1),$$

و از گزاره‌ی ۳ خواهیم داشت

$$X \stackrel{d}{=} \frac{\sin \alpha(\phi - \phi_0)}{(\cos \phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{\phi - \alpha(\phi - \phi_0)\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \sim S(\alpha, \beta_2; 2).$$

پس هر پنج رابطه معادل هستند.

رابطه‌ی (۱۴) توسط جانیکی و ورون (۱۹۹۴) نیز ارایه شده بود، ولی آن‌ها فرم نادرستی برای θ_0 بدست آوردند (مخرج کسر θ_0 را به جای α ، $|\alpha - 1| - 1$ قرار دادند، رابطه (۲.۵.۳)، ص. ۵۰). آن‌ها همچنین فرم پیچیده‌تری را به جای ضریب $\left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}$ در (۱۴) ارایه کردند و دیگر این که برای حالت $\alpha = 1$ رابطه‌ای ارایه نکردند.

۲.۲ بررسی روابط در حالت $\alpha = 1$

در حالت $\alpha = 1$ نمایش تابع مشخصه‌ای که چمبرز و همکاران (۱۹۷۶) استفاده کردند با نمایش‌های توابع مشخصه‌ی A در اچاکین و زولاتاریف (۱۹۹۹)، ورون (۱۹۹۶) (رابطه‌ی (۱.۲)، ص. ۱۶۶) و

نمایش ۱ تعریف شده در بخش ۱ معادل است، اما رابطه‌ی (۱۰) تنها با رابطه‌ی شبیه‌سازی در اچ‌اچ‌اچ و زولاتاریف (۱۹۹۹) (رابطه‌ی (۲.۲۰۸)، ص. ۲۱۶)، شکل یکسانی دارد و با رابطه‌ی بدست آمده توسط ورون (۱۹۹۶) (رابطه‌ی (۹.۳)، ص. ۱۷۰) تفاوت دارد (در ورون، ۱۹۹۶، مقدار تحت لگاریتم تابع $\left(\frac{W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi}\right)$ است). ورون این رابطه را از (۱۲)، با تغییر پارامترها از نمایش ۲ تابع مشخصه به نمایش ۱ تابع مشخصه، نتیجه گرفته بود، اما نحوه‌ی این تغییر پارامتر در مقاله‌اش آورده نشده است. ما در اینجا این تغییر پارامتر را شرح می‌دهیم. از قضیه‌ی ۱ داریم

$$X \stackrel{d}{=} \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi\right) \tan \phi - \beta \gamma \log \left(\frac{W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi}\right) \sim S(1, \beta \gamma; \gamma),$$

آنگاه از گزاره‌ی ۳ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} Y &= \gamma X + \beta \gamma \log \gamma + \delta \\ &\stackrel{d}{=} \gamma \left\{ \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi\right) \tan \phi - \beta \gamma \log \left(\frac{W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi}\right) \right\} + \beta \gamma \log \gamma + \delta \\ &\sim S(1, \beta \gamma, \gamma, \delta; \gamma), \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به (۶) داریم

$$\begin{aligned} Y &\stackrel{d}{=} \gamma \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi\right) \tan \phi - \beta \gamma \log \left(\frac{W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi}\right) + \beta \gamma \log \gamma + \delta \\ &= \gamma \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi\right) \tan \phi - \beta \gamma \left\{ \log \left(\frac{W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi}\right) - \log \gamma \right\} + \delta \\ &= \gamma \left[\left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi\right) \tan \phi - \beta \log \left\{ \frac{W \cos \phi}{\gamma \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \gamma \phi\right)} \right\} \right] + \delta \\ &= \frac{\gamma}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi\right) \tan \phi - \beta \log \left\{ \frac{\frac{\pi}{\gamma} W \cos \phi}{\gamma \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi\right)} \right\} \right] + \delta \\ &= \gamma \frac{\gamma}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi\right) \tan \phi - \beta \left\{ \log \left(\frac{\frac{\pi}{\gamma} W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi}\right) - \log \gamma \right\} \right] + \delta \\ &= \gamma \frac{\gamma}{\pi} \left\{ \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi\right) \tan \phi - \beta \log \left(\frac{\frac{\pi}{\gamma} W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi}\right) \right\} + \gamma \frac{\gamma}{\pi} \beta \log \gamma + \delta \end{aligned}$$

و از گزاره‌ی ۲ خواهیم داشت

$$X \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\pi} \left\{ \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi\right) \tan \phi - \beta \log \left(\frac{\frac{\pi}{\gamma} W \cos \phi}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta \phi}\right) \right\} \sim S(1, \beta; \gamma).$$

در نتیجه رابطه‌ی (۹.۳) ص. ۱۷۰، در ورون (۱۹۹۶) نادرست است و شکل صحیح آن، همان رابطه‌ی (۱۰) است.

۳ الگوریتم شبیه‌سازی

با توجه به روش ارائه‌شده در چمبرز و همکاران (۱۹۷۶)، تصحیح انجام‌شده در ورون را می‌توان بر اساس نتایج بدست آمده در بخش قبل به صورت زیر ارائه کرد.

الگوریتم تولید اعداد تصادفی از $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$

۱. تولید متغیر تصادفی V ، از توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(-\frac{\pi}{\gamma}, \frac{\pi}{\gamma})$ و متغیر تصادفی مستقل W ، از توزیع نمایی با میانگین ۱.

۲. محاسبه‌ی

$$(16) \quad Z = \begin{cases} c_2 \frac{\sin \alpha(V+c_1)}{(\cos V)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos\{V-\alpha(V+c_1)\}}{W} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{\gamma}{\pi} \left\{ \left(\frac{\pi}{\gamma} + \beta V \right) \tan V - \beta \log \left(\frac{\frac{\pi}{\gamma} W \cos V}{\frac{\pi}{\gamma} + \beta V} \right) \right\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

$$\text{که } c_2 = (1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{\gamma})^{\frac{1}{2\alpha}} \text{ و } c_1 = \arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{\gamma})/\alpha$$

۳. قرار دادن

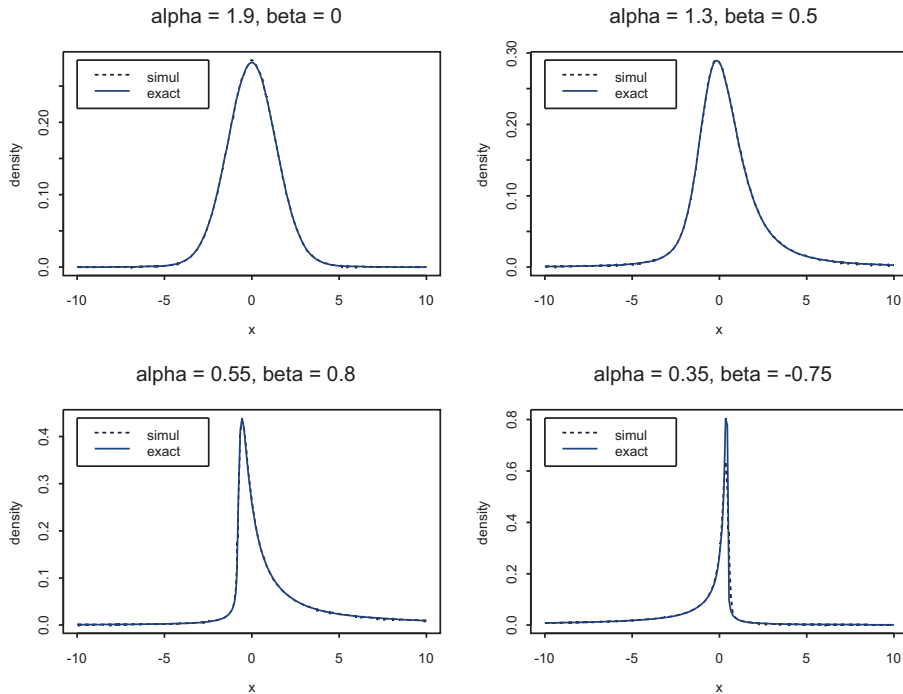
$$X = \begin{cases} \gamma Z + \delta, & \alpha \neq 1, \\ \gamma Z + \gamma \frac{\gamma}{\pi} \beta \log \gamma + \delta, & \alpha = 1. \end{cases}$$

$$.X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1) \text{ آنگاه}$$

اگر $\alpha = 2$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه سمت راست رابطه‌ی (۱۶) به رابطه‌ی $W^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2V}{\cos V} = 2W^{\frac{1}{2}} \sin V$ کاهش پیدا می‌کند، که روش باکس-مولر برای شبیه‌سازی یک متغیر تصادفی $N(0, 2)$ است. همچنین اگر $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه سمت راست رابطه‌ی (۱۶) برابر $\tan V$ می‌شود، که یک متغیر تصادفی کوشی است.

در شکل ۱ نمودار توابع چگالی تجربی متغیرهای تصادفی پایدار استاندارد، بدست آمده از الگوریتم فوق با توابع چگالی بدست آمده از معکوس تابع مشخصه، برای مقادیر، $(\alpha = 1.9, \beta = 0)$ ، $(\alpha = 1.3, \beta = 0.5)$ ، $(\alpha = 0.55, \beta = 0.8)$ و $(\alpha = 0.35, \beta = -0.75)$ مقایسه شده است. برنامه‌ی محاسبه‌ی تابع چگالی متغیرهای تصادفی پایدار از وبگاه زیر قابل بازیابی است.

<http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>



شکل ۱. نمودار توابع چگالی تجربی و توابع چگالی بدست آمده از معکوس تابع مشخصه‌ی متغیرهای تصادفی پایدار

مرجع‌ها

فیروزی، م. (۱۳۸۸). روش‌های بهبود سرعت شبیه‌سازی بردارهای تصادفی پایدار، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران.

- Chambers, J.M., Mallows, C.L. and Stuck, B.W. (1976). A method for simulating stable random variables, *J. The American Statistical Association.*, **71**, 340-344.
- Ibragimov, I.A. and Chernin, K.E. (1959). On the unimodality of stable laws, *J. Theory of Probability and Its Applications.*, **4**, 417-419.
- Janicki, A. and Weron, A. (1994). *Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, New York.
- Kanter, M. (1975). Stable densities under change of scale and total variation inequalities, *J. Annals of Probability.* **3**, 697-707.
- Leccardi, M. (2005). Comparison of Three Algorithms for Lévy Noise Generation, *ENOC'05 (Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference)*.
- Lévy, P. (1924). Théorie des erreurs la loi de Gauss et les lois exceptionnelles, *Bulletin de la Société Mathématique de France.* **52**, 49-58.
- Nolan, J.P. (2010). *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*, Birkhäuser, Boston, in progress.
- Popa, S. (2005). *Stable Distributions and Numerical Generation of stable random variables*. M.Sc. Thesis, University of Wyoming.
- Uchaikin, V.V. and Zolotarev, V.M. (1999). *Chance and Stability*. VSP Science.
- Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman and Hall, New York.
- Weron, R. (1996). On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables, *J. Statistics and Probability Letters.* **28**, 165-171.
- Zolotarev, V.M. (1966). On representation of stable laws by integrals, *Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability.* **6**, 84-88, Russian original, 1964.
- Zolotarev, V.M. (1986). *One-Dimensional Stable Distributions*. American Mathematical Society, Providence, RI, Russian original, 1983.

عادل محمدپور

گروه آمار، دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر،

دانشگاه صنعتی امیرکبیر،

تهران، ایران.

رایانشانی: adel@aut.ac.ir

مهدی فیروزی

گروه آمار، دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر،

دانشگاه صنعتی امیرکبیر،

تهران، ایران.