



گشتاورهای متغیر همراه رکورد کلاسیک و کران‌های ناپارامتری میانگین تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن

مرتضی امینی* و جعفر احمدی

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده. در یک دنباله از متغیرهای تصادفی جفت شده، زمانی که فقط بررسی دنباله‌ای از آماره‌های یکی از دو مؤلفه مد نظر باشد، مؤلفه‌ی دوم متناظر با هر آماره تحت عنوان متغیر همراه (concomitant) آن آماره مورد بررسی قرار می‌گیرد. از جمله‌ی این آماره‌ها می‌توان آماره‌های ترتیبی، رکوردها، سانسورها و غیره را نام برد. در این مقاله هدف بررسی خواص دنباله‌ی متغیرهای همراه رکوردها است. در یک دنباله از متغیرهای تصادفی، رکوردها مقادیری هستند که از مشاهدات قبلی بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر هستند. بسیاری از پدیده‌های طبیعی، داده‌های مربوط به مسابقات ورزشی و یا آزمایش‌های بالینی در قالب این چنین الگوهای احتمال، قابل بررسی هستند. بدین منظور برای دنباله‌ای از جفت مشاهدات مستقل و هم‌توزیع با متغیرهای تصادفی (X, Y) خواص گشتاورهای متغیرهای تصادفی Y متناظر با رکوردهای متغیر تصادفی X در حالت کلی و تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن (Farlie-Gumbel-Morgenstern) مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه کران‌های ناپارامتری میانگین تحت مدل بالا و به‌شیوه‌های متفاوت به دست آمده و با هم مقایسه شده‌اند.

واژگان کلیدی. رکورد بالا؛ متغیر همراه؛ گشتاور؛ مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن؛ نابرابری کوشی-شوارتس؛ کران ناپارامتری.

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات.

۱ مقدمه

در بسیاری از موارد در دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی جفت شده، فقط بررسی دنباله‌ای از آماره‌های یکی از دو مؤلفه مد نظر است. این مسئله می‌تواند به سبب عدم دسترسی آسان به مؤلفه‌ی دوم، اهمیت نخستین مؤلفه، یا پیچیدگی مدل‌های ریاضی توأم باشد. برای مثال، درگزینه‌های مرحله‌ای، افراد در مرحله‌ی اول بر اساس مهم‌ترین مؤلفه انتخاب می‌شوند. بنا بر این، مؤلفه‌ی دوم هر فرد انتخاب شده تابعی ازگزینه‌های مرحله‌ی اول است. مطالعه در خصوص چنین مسائلی گوشه‌ای از کاربردهای متغیر همراه آماره‌های ترتیبی را نشان می‌دهد. از جمله کارهای انجام شده در این خصوص می‌توان به دیوید و ناگارا (۱۹۸۸) اشاره کرد. در خصوص رکوردها نیز با مسائلی مشابه روبه‌رو هستیم. برای مثال در یک مسابقه‌ی ورزشی وزنه‌برداری، رکوردهای وزنه‌برداران در رقابت دوزخ‌بند شده است و ما علاقه‌مند به کسب اطلاعات بیش‌تر درباره‌ی مقدار رکوردهای ورزشکاران در رقابت یک‌ضرب هستیم. تا کنون مطالعه‌ی قابل توجهی در مورد متغیر همراه رکوردها انجام نشده است. هوجنز (۱۹۸۴) فقط نگاهی کوتاه به بعضی خواص متغیر همراه رکورد بالا دارد. وی همچنین به بررسی مثال‌هایی کوتاه در این خصوص پرداخته است. از جمله کارهای اخیر انجام شده در این مورد می‌توان به احسان ... (۱۹۹۴، ۲۰۰۰)، خالدی و کوچار (۲۰۰۲)، و ركب و احسان ... (۲۰۰۲) اشاره کرد. برای ارائه‌ی تعاریف دقیق‌تر، نخست، آماره‌های رکورد را تعریف می‌کنیم.

در بسیاری از موارد در بررسی دنباله‌ای از پدیده‌های تصادفی، فقط مشاهداتی ثبت می‌شوند که از مقادیر پیشین خود بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر باشند. این دنباله از متغیرها به آماره‌ی رکورد معروف‌اند. بدین ترتیب که اگر مشاهده‌ی جدید از مشاهدات قبل از خودش بزرگ‌تر باشد آن را رکورد بالا و اگر کوچک‌تر باشد آن را رکورد پایین می‌نامیم. برای مثال می‌توان از ثبت بزرگ‌ترین زلزله در مقیاس ریشتر تا زمان حال، بیش‌ترین رکورد ثبت شده توسط یک ورزشکار، یا دمای سردترین روز یک ماه خاص از سال در یک شهر نام برد. این نظریه به دلیل اهمیت کاربردی در زمینه‌های مختلف به تازگی نظر بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. همچنین، مقاله‌ها و کتاب‌های زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است. در این جا ما فقط به بیان تعریف‌های ابتدایی مربوط به رکوردهای بالا بسنده می‌کنیم. برای آگاهی بیش‌تر از این پژوهش‌ها می‌توان به آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه کرد. فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی باشد. زمان رخداد رکوردها با دنباله‌ی $\{T_n, n \geq 0\}$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_0 = 1, \quad \text{با احتمال یک}$$

و برای هر $n \geq 1$

$$T_n = \min\{j : X_j > X_{T_{n-1}}\}.$$

در دنباله‌ی نامتناهی $\{X_i\}$ از متغیرهای تصادفی، مشاهده‌ی X_j را یک رکورد بالا می‌گوییم اگر برای هر $j < i$ داشته باشیم $X_j > X_i$. به عبارت دیگر با استفاده از تعریف ۱،

$$R_n = X_{T_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با فرض اینکه X_i ها متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال f_X و تابع توزیع تجمعی F_X باشند، تابع چگالی رکورد n ام بالا به صورت زیر است:

$$(۱) \quad f_{R_n}(x) = \frac{1}{n!} f_X(x) \{-\log(S_X(x))\}^n,$$

که در آن

$$S_X(x) = 1 - F_X(x).$$

همچنین چگالی توأم نخستین $n + 1$ رکورد بالا برابر است با:

$$(۲) \quad f_{R_1, \dots, R_n}(x_0, \dots, x_n) = f_X(x_n) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f_X(x_i)}{S_X(x_i)},$$

و برای $m < n$ تابع چگالی توأم دو رکورد به صورت زیر است:

$$(۳) \quad f_{R_m, R_n}(x_1, x_2) = \frac{\{-\log(S_X(x_1))\}^m \left\{-\log\left(\frac{S_X(x_2)}{S_X(x_1)}\right)\right\}^{n-m} f_X(x_1) f_X(x_2)}{m!(n-m-1)! S_X(x_1)}.$$

برای جزئیات اثبات (۱)، (۲)، و (۳) می‌توان به آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه کرد. دو تعریف ۱ و ۲ را می‌توان به صورت توأم نیز مطرح نمود. همچنین می‌توان تعریف متغیر همراه را در متن آن گنجانند.

تعریف ۳ به‌طور هم‌زمان مفاهیم زمان رکورد، دنباله‌ی رکوردها و متغیر همراه رکوردها را معرفی می‌کند.

فرض کنید (X_i, Y_i) ، $i \geq 1$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی جفت‌شده باشد. دنباله‌ی متغیرهای

تصادفی جفت‌شده $(R_i, R_{[i]})$ ، $i \geq 0$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(R_0, R_{[0]}) = (X_1, Y_1), \quad \text{با احتمال یک}$$

و برای هر $n \geq 1$

$$(R_n, R_{[n]}) = (X_{T_n}, Y_{T_n}),$$

که در آن T_n زمان رخداد n امین رکورد در مؤلفه اول است.

در این صورت به R_n رکورد n ام بالا و به $R_{[n]}$ متغیر همراه رکورد n ام بالا گفته می‌شود. در ادامه‌ی مقاله، منظور از متغیر همراه n ام همان متغیر همراه رکورد n ام بالا است. بخش ۲ شامل توابع چگالی توأم و حاشیه‌ای متغیر همراه و فرمول‌هایی برای گشتاورهای این متغیر تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن (FGM) است. در بخش ۳ کران‌های ناپارامتری برای میانگین متغیر همراه n ام تحت مدل FGM با فرضیات متفاوت به دست آمده و با هم مقایسه شده‌اند. مشابه این کران‌ها برای رکوردها و آماره‌های ترتیبی را می‌توان در بالا کریشنان (۱۹۹۰) و ناگاراچا (۱۹۷۸) مشاهده کرد.

۲ متغیر همراه تحت مدل FGM

فرض کنید $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ دنباله‌ای مستقل و هم‌توزیع از متغیرهای تصادفی جفت‌شده‌ی پیوسته با تابع توزیع $F(x, y)$ و تابع چگالی $f(x, y)$ باشد. چگالی شرطی Y به شرط $X = x$ را با $f_{Y|X}(y|x)$ و چگالی‌های حاشیه‌ای را با $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید $f_{R_k}(\mathbf{x}) = f_{R_{r_1}, \dots, R_{r_k}}(x_1, \dots, x_k)$ نشان دهنده‌ی تابع چگالی احتمال توأم R_{r_1}, \dots, R_{r_k} باشد که در آن

$$1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k \leq n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

در این صورت با توجه به استقلال زوج‌های (X_i, Y_i) ، $i \geq 1$ ، همان‌طور که در بانگ (۱۹۷۷) بحث شده است داریم:

$$f_{R_{[r_1], \dots, R_{[r_k]}} | R_{r_1}, \dots, R_{r_k}}(y_1, \dots, y_k | x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k f_{Y|X}(y_i | x_i).$$

بنا بر این، $f_{R_{[k]}}(\mathbf{y}) = f_{R_{[r_1], \dots, R_{[r_k]}}}(y_1, \dots, y_k)$ ، تابع چگالی توأم k متغیر همراه $(R_{[r_1]}, \dots, R_{[r_k]})$ به صورت زیر است:

$$(4) \quad f_{R_{[k]}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_2} \prod_{i=1}^k f_{Y|X}(y_i | x_i) f_{R_k}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k dx_i$$

تحت مفروضات بالا، $f_{R_{[n+1]}}(\mathbf{y}) = f_{R_{[1], \dots, R_{[n]}}}(y_0, \dots, y_n)$ تابع چگالی توأم نخستین $n + 1$ متغیر همراه رکوردهای بالا برابر است با:

$$f_{R_{[n+1]}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X,Y}(x_n, y_n) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f_{X,Y}(x_i, y_i)}{S_X(x_i)} \prod_{i=0}^n dx_i.$$

بدین ترتیب، تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر همراه n ام به صورت زیر است:

$$(5) \quad f_{R_{[n]}}(y) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \{-\log(S_X(x))\}^n dx.$$

رابطه‌ی (۵) نشان‌دهنده‌ی یک رابطه بین تابع چگالی متغیر همراه و تابع چگالی شرطی Y به شرط مقادیر مختلف X است. در واقع با معلوم بودن توزیع متغیر تصادفی X و گشتاورهای شرطی Y به شرط مقادیر مختلف X و با استفاده از مطالب گفته شده، می‌توان فرمول‌هایی به صورت زیر برای محاسبه‌ی گشتاورهای متغیر همراه به دست آورد:

$$(6) \quad \begin{aligned} \alpha_{[n]}^{(k)} &= E\{E(Y^k|X = R_n)\} \\ \alpha_{[m,n]}^{(t,s)} &= E\{E(Y^t|X = R_m)E(Y^s|X = R_n)\}. \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_{[m,n]}^{(t,s)}$ و $\alpha_{[n]}^{(k)}$ به ترتیب گشتاور مرتبه‌ی k ام و گشتاور حاصل ضرب متغیر همراه هستند. برای جزئیات بیشتر در خصوص اثبات موارد (۴)، (۵) و (۶) می‌توان به رکب و احسان ... (۲۰۰۲) یا خالدی و کوچار (۲۰۰۱) مراجعه کرد.

حال خواص متغیر همراه و گشتاورهای آن را تحت مدل FGM بررسی می‌کنیم. مدل FGM در حقیقت مدلی از چگالی توأم دو متغیر تصادفی بر حسب چگالی حاشیه‌ای آن دو متغیر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای یک بردار تصادفی (X, Y) با توابع چگالی حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ ، تابع چگالی توأم مدل FGM به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \{1 + \alpha(1 - 2F_X(x))(1 - 2F_Y(y))\},$$

که در آن $\alpha \in (-1, 1)$.

حال تابع چگالی $R_{[n]}$ را به دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۱ تحت مدل FGM تابع چگالی احتمال متغیر همراه n ام به صورت زیر است:

$$(7) \quad f_{R_{[n]}}(y) = f_Y(y) \{1 + \alpha(1 - 2^{-n})(2F_Y(y) - 1)\}.$$

برهان. با استفاده از (۵) و تحت مدل FGM داده شده در تابع چگالی متغیر همراه رکورد n ام بالا برابر است با:

$$\begin{aligned} f_{R_{[n]}}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \frac{\{-\log(S_X(x))\}^n}{n!} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \frac{\{-\log(S_X(x))\}^n}{n!} dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(y) \{1 + \alpha(1 - 2F_X(x))(1 - 2F_X(x))\} \\ &\quad \times \{-\log(S_X(x))\}^n dx. \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $z = -\log(S_X(x))$ مقدار انتگرال بالا برابر است با:

$$f_Y(y) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{n!} (2F_Y(y) - 1) \int_0^{\infty} (e^{-z} - 2e^{-2z}) z^n dz \right\},$$

که با محاسبه‌های جبری لازم برهان کامل می‌شود. چگالی داده شده در (۷) یک رابطه‌ی کاملاً مستقل از رکوردها را برای متغیرهای همراه آن‌ها فراهم می‌کند. بدین ترتیب می‌توان گشتاورهای مربوط به این متغیر را فقط با داشتن اطلاعاتی از توزیع متغیر تصادفی Y بررسی کرد. قضیه‌ی زیر رابطه‌ی بین گشتاور مرتبه‌ی k ام متغیر همراه و دو نوع گشتاور مربوط به توزیع Y را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۲ تحت مدل FGM، گشتاور k ام متغیر همراه n ام را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha_{[n]}^{(k)} = \alpha^{(k)} + \alpha(1 - 2^{-n}) (\alpha_{2;2}^{(k)} - \alpha^{(k)}),$$

که در آن $\alpha^{(k)}$ گشتاور k ام توزیع Y و $\alpha_{2;2}^{(k)}$ گشتاور k ام بزرگ‌ترین آماره‌ی مرتب در یک نمونه‌ی دوتایی از این توزیع است.

برهان. با استفاده از (۷) و تابع چگالی احتمال دومین آماره‌ی ترتیبی در یک نمونه‌ی دوتایی، داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_{[n]}^{(k)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k f_{R_{[n]}}(y) dy \\ &= \alpha^{(k)} + \alpha(1 - 2^{-n}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} 2y^k f_Y(y) F_Y(y) dy - \alpha^{(k)} \right) \\ &= \alpha^{(k)} + \alpha(1 - 2^{-n}) (\alpha_{2;2}^{(k)} - \alpha^{(k)}). \end{aligned}$$

نتیجه‌ی ۱ با توجه به قضیه‌ی ۳ میانگین و واریانس متغیر همراه m برابر است با:

$$\alpha_{[n]} = \mu + \alpha(1 - 2^{-n})(\alpha_{2;2} - \mu),$$

و

$$\begin{aligned} \sigma_{[n]}^2 &= \sigma^2 + \alpha(1 - 2^{-n})(\mu^2 - \sigma^2 + \alpha_{2;2}^{(2)} - 2\mu\alpha_{2;2}) \\ &\quad - \alpha^2(1 - 2^{-n})^2(\alpha_{2;2} - \mu)^2, \end{aligned}$$

که در آن‌ها μ و σ^2 میانگین و واریانس متغیر تصادفی Y هستند.

مثال ۱ فرض کنید Y_i ‌ها دارای توزیع نرمال استاندارد باشند. در این صورت می‌توان نشان داد $\alpha_{2;2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ و $\alpha_{2;2}^{(2)} = \alpha^{(2)} = 1$. بنا بر این، میانگین و واریانس متغیر همراه m به ترتیب برابرند با:

$$\alpha_{[n]} = \alpha(1 - 2^{-n}) \alpha_{2;2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} (1 - 2^{-n}),$$

و

$$\sigma_{[n]}^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\pi} (1 - 2^{-n})^2.$$

اما برای به دست آوردن گشتاورهای حاصل ضرب به توزیع توأم دو متغیر همراه نیاز داریم. این تابع چگالی توأم در قضیه‌ی ۳ به دست آمده است. اما قبل از بیان قضیه نیاز به محاسبه‌ی یک انتگرال در لم زیر داریم.

لم ۱ فرض کنید برای $m < n$,

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} F_X(x_1)^a F_X(x_2)^b f_{R_m, R_n}(x_1, x_2) dx_2 dx_1,$$

که در آن $a = 0, 1$ و $b = 0, 1$.

در این صورت داریم:

$$I(a, b) = \begin{cases} 1, & a = 0, b = 0 \\ (1 - 2^{-n-1}), & a = 0, b = 1 \\ (1 - 2^{-m-1}), & a = 1, b = 0 \\ 1 - 2^{-m-1} - 2^{-n-1} + 2^{-m-1} 2^{m-n}, & a = 1, b = 1 \end{cases}$$

برهان. با تغییر متغیر $z = -\log\left(\frac{S_X(x_2)}{S_X(x_1)}\right)$ برای انتگرال داخلی و تغییر متغیر $w = -\log(S_X(x_1))$ برای انتگرال بیرونی مقدار انتگرال به راحتی محاسبه می شود.

قضیه ۳ تحت مفروضات مورد بحث، برای $m < n$ چگالی توأم دو متغیر همراه برابر است بد.

$$f_{R_{[m]}, R_{[n]}}(y_1, y_2) = f_Y(y_1) f_Y(y_2) \left\{ 1 + \alpha(2F_Y(y_1) - 1)(1 - 2^{-m}) \right. \\ \left. + \alpha(2F_Y(y_2) - 1)(1 - 2^{-n}) + \alpha^2(2F_Y(y_1) - 1) \right. \\ \left. \times (2F_Y(y_2) - 1)(2^{-m-1} 2^{m+2-n} - 2^{-m} - 2^{-n} + 1) \right\}.$$

برهان. با استفاده از (۴) می توان نوشت:

$$f_{R_{[m]}, R_{[n]}}(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} f_{Y|X}(y_1|x_1) f_{Y|X}(y_2|x_2) f_{R_m, R_n}(x_1, x_2) dx_2 dx_1.$$

بنا بر این، تحت مدل FGM داریم:

$$f_{R_{[m]}, R_{[n]}}(y_1, y_2) = f_Y(y_1) f_Y(y_2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{R_m, R_n}(x_1, x_2) dx_2 dx_1,$$

که در آن

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1,2} [\lambda + \alpha(2F_X(x_i) - 1)(2F_Y(y_i) - 1)].$$

پس با استفاده از لم ۱ اثبات کامل می شود.

با استفاده از قضیه ۳ نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۲ تحت مدل FGM، برای t و s دلخواه و $m < n$ داریم:

$$(۸) \quad \alpha_{[m,n]}^{(t,s)} = \alpha^{(s)} \alpha^{(t)} + \alpha(1 - 2^{-n}) \alpha^{(t)} (\alpha_{2;2}^{(s)} - \alpha^{(s)}) \\ + \alpha(1 - 2^{-m}) \alpha^{(s)} (\alpha_{2;2}^{(t)} - \alpha^{(t)}) + (\alpha_{2;2}^{(t)} - \alpha^{(t)}) (\alpha_{2;2}^{(s)} - \alpha^{(s)}) \\ \times \alpha^2 (2^{-m-1} 2^{m-n+2} - 2^{-m} - 2^{-n} + 1).$$

نتیجه ۳ تحت مدل FGM، کواریانس دو متغیر همراه برای $m < n$ برابر است با:

$$(۹) \quad \text{Cov}(R_{[m]}, R_{[n]}) = (2^{-m-1} 2^{m-n+2} - 2^{-m-n}) \alpha^2 (\alpha_{2;2} - \mu)^2.$$

برهان. با جایگذاری $s = t = 1$ در نتیجه‌ی قبل داریم:

$$E(R_{[m]}R_{[n]}) = \mu^2 + (\nu - \nu^{-m} - \nu^{-n}) \alpha \mu (\alpha_{\nu;\nu} - \mu) + (\nu^{-m-1} \nu^{m-n+2} - \nu^{-m} - \nu^{-n} + 1) \alpha^2 (\alpha_{\nu;\nu} - \mu)^2.$$

همچنین با استفاده از نتیجه‌ی ۱

$$E(R_{[m]})E(R_{[n]}) = \mu^2 + (\nu - \nu^{-m} - \nu^{-n}) \alpha \mu (\alpha_{\nu;\nu} - \mu) + (1 - \nu^{-n})(1 - \nu^{-m}) \alpha^2 (\alpha_{\nu;\nu} - \mu)^2.$$

بنا بر این (۹) حاصل می‌شود.

تذکر ۱ نتیجه‌ی ۳ را می‌توان با استفاده از (۶) و با توجه به این که در مدل FGM داریم:

$$E(Y|X = x) = \mu + \alpha(\nu F_X(x) - 1)(\alpha_{\nu;\nu} - \mu),$$

به دست آورد.

مثال ۲ (ادامه‌ی مثال ۱) بنا بر (۹) کوواریانس دو متغیر همراه n و m برای $m < n$ برابر است با:

$$\text{Cov}(R_{[m]}, R_{[n]}) = \frac{\alpha^2}{\pi} (\nu^{-m-1} \nu^{m-n+2} - \nu^{-m-n}),$$

با توجه به واریانس به دست آمده در مثال ۱ نمی‌توان ضریب همبستگی را به صورت مضربی از α^2 نوشت. بنا بر این، مقادیر ضریب همبستگی به منظور مقایسه به‌ازای $\alpha = \frac{1}{\pi}$ برای بعضی مقادیر مختلف m و n در جدول ۱ داده شده است.

جدول ۱. جدول مقادیر ضریب همبستگی دو متغیر همراه در توزیع نرمال استاندارد

		m				
		۱۰	۵	۳	۱	n
	۲				۰٫۰۰۷۹۹	۲
	۴			۰٫۰۰۱۴۴	۰٫۰۰۲۰۲	۴
	۶		۰٫۰۰۰۱۹	۰٫۰۰۰۳۶	۰٫۰۰۰۵۱	۶
	۱۱	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰۲	۱۱
	۱۵	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۱۵

۳ کران‌های ناپارامتری میانگین تحت مدل FGM

در مواردی که توزیع دقیق Y_i ها معلوم نباشد با استفاده از شیوه‌های مختلف، می‌توان یک کران بالا برای میانگین $R_{[n]}$ یافت. یکی از متداول‌ترین این شیوه‌ها استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس است. در این بخش با استفاده از این نابرابری و تحت شرایط متفاوت، کران‌های ناپارامتری بالای متفاوت برای میانگین متغیر همراه به دست می‌آید.

۳٫۱ کران عمومی

برای به دست آوردن کران‌های ناپارامتری میانگین، بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $E(Y_i) = 0$ و $Var(Y_i) = 1$ ، بنا بر این، با استفاده از نتیجه‌ی ۱ می‌توان نوشت:

$$(۱۰) \quad \alpha_{[n]} = \alpha(1 - 2^{-n}) \alpha_{2;2},$$

قضیه‌ی زیر ساده‌ترین کران ناپارامتری را با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس ارائه می‌دهد.

قضیه‌ی ۴ یک کران ناپارامتری برای میانگین $R_{[n]}$ به صورت زیر است:

$$(۱۱) \quad \alpha_{[n]} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}(1 - 2^{-n}).$$

برهان. با تغییر متغیر $u = F_Y(y)$ در $\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) F_Y(y) dy$ داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_{[n]} &= \alpha(1 - 2^{-n}) \alpha_{2;2} \\ &= 2\alpha(1 - 2^{-n}) \int_0^1 F_Y^{-1}(u)u \, du \\ &= \int_0^1 F_Y^{-1}(u)\{2\alpha(1 - 2^{-n})u - \lambda\} \, du. \end{aligned}$$

با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس می‌توان نوشت:

$$\alpha_{[n]} \leq \left[\int_0^1 \{2\alpha(1 - 2^{-n})u - \lambda\}^2 \, du \right]^{\frac{1}{2}}.$$

که پس از ساده کردن سمت راست نابرابری بالا، عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$\alpha_{[n]} \leq \left\{ \frac{4}{3}\alpha^2(1 - 2^{-n})^2 - 2\alpha(1 - 2^{-n})\lambda + \lambda^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

سمت راست نابرابری بالا به‌ازای $\lambda = \alpha(1 - 2^{-n})$ مینیمم می‌شود، در نتیجه اثبات کامل است.

همین‌طور که ملاحظه می‌کنید توزیع نرمال استاندارد (مثال ۱) در این قاعده صدق می‌کند.

نتیجه‌ی ۴ با توجه به شرط برقراری تساوی در نابرابری کوشی-شوارتس، کران بالا زمانی به دست می‌آید که Y_i ها از جامعه‌ای با تابع توزیع تجمعی معکوس زیر به دست آمده باشند:

$$\begin{aligned} F_Y^{-1}(u) &= \frac{1}{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}(1 - 2^{-n})} \{1 + \alpha(1 - 2^{-n})(2u - 1) - 1\} \\ &= \sqrt{3}(2u - 1). \end{aligned}$$

بنا بر این، تابع توزیع تجمعی به صورت زیر خواهد بود:

$$F_Y(y) = \frac{1 + \sqrt{3}y}{2}.$$

در نتیجه، کران بالا زمانی به دست می‌آید که Y_i ها دارای توزیع یکنواخت در بازه $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ باشند.

نتیجه‌ی ۵ زمانی که اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، حد کران (۱۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{3}}(1 - 2^{-n}) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}.$$

به عبارت دیگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{[n]} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}.$$

با توجه به این که $(1 - 2^{-n})$ نسبت به n صعودی است می‌توان کران بالا را به‌عنوان یک کران عمومی در نظر گرفت. همچنین با حدگیری از (۷) و اجرای مراحل برهان قضیه‌ی ۴، می‌توان این کران را برای توزیع حدی زیر به دست آورد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{R_{[n]}}(y) = f_Y(y) \{1 + \alpha(2F_Y(y) - 1)\}.$$

تذکر ۲ با استفاده از نتایج مشابه برای $\alpha_{2:n}$ می‌توان به‌طور غیر مستقیم، قضیه‌ی ۴ و نتیجه‌ی ۴ را به دست آورد. زیرا همان‌طور که هارتلی و دیوید (۱۹۵۴) و گامبل (۱۹۵۴) و مورینگوتی (۱۹۵۴، ۱۹۵۱) نشان داده‌اند:

$$\alpha_{n:n} \leq \frac{n-1}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

برابری زمانی به دست می‌آید که نمونه‌ی تصادفی از توزیع زیر تولید شده باشد:

$$F(y) = \left[\frac{1}{n} \left\{ \frac{n-1}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} x + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad -\frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{n-1} \leq x \leq (2n-1)^{\frac{1}{2}}.$$

که با جایگذاری مقدار $n = 2$ قضیه‌ی ۴ و نتیجه‌ی ۴ به دست خواهند آمد.

۳٫۲ کران برای توزیع‌های متقارن

معمولاً وقتی که توزیع جامعه متقارن باشد، کران‌های ناپارامتری بهبود پیدا می‌کنند، اما این مسئله برای متغیر همراه در مدل FGM برقرار نیست. این موضوع در قضیه‌ی زیر اثبات می‌شود.

قضیه‌ی ۵ در حالتی که توزیع Y_i ها متقارن و استاندارد باشد، نابرابری کوشی-شوارتس کران (۱۱) را بهبود نمی‌دهد.

برهان. با توجه به تقارن توزیع می‌توان نوشت:

$$\alpha_{[n]} = \alpha(1 - 2^{-n}) \int_0^1 F_Y^{-1}(u) \{u - (1-u) - \lambda\} du.$$

بنا بر نابرابری کوشی-شوارتس داریم:

$$\alpha_{[n]} \leq \alpha(1 - 2^{-n}) \left(\frac{1}{3} + \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

که سمت راست نابرابری به‌ازای $\lambda = 0$ مینیمم می‌شود. بدین ترتیب، حکم ثابت می‌شود.

۳٫۳ بهبود کران‌ها با دو مقدار میانگین معلوم

در این بخش، حالتی را در نظر می‌گیریم که دو میانگین متغیرهای همراه مثل $\alpha_{[p]}$ و $\alpha_{[m]}$ ($m < p$) معلوم باشند. کران‌هایی که در این حالت به دست می‌آیند در اصطلاح کران‌های برون‌یابی (extrapolation-type bounds) نامیده می‌شوند.

قضیه‌ی ۶ وقتی دو میانگین متغیرهای همراه مثل $\alpha_{[m]}$ و $\alpha_{[p]} \neq 0$ ($m < p$) معلوم باشند

$$\alpha_{[n]} \leq (L(n, n) - A)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن

$$L(m, n) = \frac{\alpha^{\uparrow}}{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I} - \mathfrak{I}^{-n})(\mathfrak{I} - \mathfrak{I}^{-m}),$$

$$A = \frac{\left(L(m, n) - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L(p, n) \right)^{\uparrow}}{L(m, n) - \mathfrak{I} \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L(m, p) + \left(\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} \right)^{\uparrow} L(p, p)}.$$

همچنین، کران بالا نسبت به (۱۱) بهبود یافته است، مگر در حالت $\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} = \frac{L(m, n)}{L(p, n)}$

برهان. برای آسان‌تر شدن کار، تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g_l(u) = \mathfrak{I} + \alpha(\mathfrak{I} - \mathfrak{I}^{-l})(\mathfrak{I}u - \mathfrak{I}).$$

پس می‌توان نوشت:

$$\alpha_{[n]} = \int_0^{\mathfrak{I}} F_Y^{-\mathfrak{I}}(u) [g_n(u) - c\{g_m(u) - \alpha_{[m]}F_Y^{-\mathfrak{I}}(u)\} - d\{g_p(u) - \alpha_{[p]}F_Y^{-\mathfrak{I}}(u)\} - \lambda] du.$$

به راحتی می‌توان دید که

$$\int_0^{\mathfrak{I}} g_n(u) du = \mathfrak{I}.$$

به علاوه، برای خلاصه‌سازی نتایج قرار می‌دهیم:

$$K(m, n) = \int_0^{\mathfrak{I}} g_n(u)g_m(u) du = \mathfrak{I} + \frac{\alpha^{\uparrow}}{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I} - \mathfrak{I}^{-n})(\mathfrak{I} - \mathfrak{I}^{-m}).$$

بدین ترتیب با اعمال نابرابری کوشی-شوارتس بر (۱۳) داریم:

$$\alpha_{[n]} \leq \left\{ K(n, n) + c^{\uparrow}(K(m, m) - \alpha_{[m]}^{\uparrow}) + d^{\uparrow}(K(p, p) - \alpha_{[p]}^{\uparrow}) + \lambda^{\uparrow} - \mathfrak{I}c(K(m, n) - \alpha_{[m]}\alpha_{[n]}) - \mathfrak{I}d(K(p, n) - \alpha_{[p]}\alpha_{[n]}) - \mathfrak{I}\lambda(\mathfrak{I} - c - d) + \mathfrak{I}cd(K(m, p) - \alpha_{[m]}\alpha_{[p]}) \right\}^{\frac{1}{\uparrow}}.$$

با انتقال مقادیر نامعلوم به طرف چپ، نابرابری به صورت زیر ساده می شود:

$$\alpha_{[n]}(\lambda - \nu c\alpha_{[m]} - \nu d\alpha_{[p]}) \leq \left\{ K(n, n) + c^\nu(K(m, m) - \alpha_{[m]}^\nu) + d^\nu(K(p, p) - \alpha_{[p]}^\nu) + \lambda^\nu - \nu cK(m, n) - \nu dK(p, n) - \nu\lambda(\lambda - c - d) + \nu cd(K(m, p) - \alpha_{[m]}\alpha_{[p]}) \right\}^{\frac{1}{\nu}}.$$

d را طوری انتخاب می کنیم که ضریب $\alpha_{[n]}$ در سمت چپ نابرابری یک شود، یعنی قرار می دهیم $d = -\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}c$. همچنین، مقدار بهینه λ یعنی $\lambda = \left\{ \lambda - c \left(\lambda - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} \right) \right\}$ را جایگزین می کنیم. بدین ترتیب مقدار بهینه c برابر است با:

$$c_{\text{opt}} = \frac{L(m, n) - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}L(p, n)}{L(m, n) - \nu \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}L(m, p) + \left(\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} \right)^\nu L(p, p)},$$

که در آن

$$L(m, n) = K(m, n) - \lambda = \frac{\alpha^\nu}{\nu}(\lambda - \nu^{-n})(\lambda - \nu^{-m}).$$

با جایگذاری مقادیر بهینه در سمت راست نابرابری حکم ثابت می شود. بهبود این کران نسبت به (۱۱) با توجه به این که $A \geq 0$ نتیجه می شود. اما در حالت $\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} = \frac{L(m, n)}{L(p, n)}$ داریم $A = 0$ و کران نسبت به (۱۱) تغییری نمی کند.

برای بهبود دادن بیش تر حالت بالا می توان توزیع های متقارن استاندارد با دو مقدار میانگین معلوم را در نظر گرفت.

قضیه ۷ با توجه به فرضیات قضیه ۶ برای توزیع های متقارن استاندارد داریم:

$$\alpha_{[n]} \leq (L^*(n, n) - A^*)^{\frac{1}{\nu}},$$

که در آن

$$L^*(i, j) = L(i, j) - \lambda,$$

$$A^* = \frac{\left(L^*(m, n) - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L^*(p, n) \right)^{\vartheta}}{L^*(m, n) - \vartheta \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L^*(m, p) + \left(\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} \right)^{\vartheta} L^*(p, p)}.$$

برهان. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\alpha_{[n]} = \frac{1}{\vartheta} \int_0^1 F_Y^{-1}(u) \left[g_n(u) - g_n(1-u) - c \{ g_m(u) - g_m(1-u) - \vartheta \alpha_{[m]} F_Y^{-1}(u) \} - d \{ g_p(u) - g_p(1-u) - \vartheta \alpha_{[p]} F_Y^{-1}(u) \} - \lambda \right] du.$$

بنا بر این،

$$\begin{aligned} \alpha_{[n]} &\leq \frac{1}{\vartheta} \left\{ \vartheta K(n, n) - \vartheta \int_0^1 g_n(u) g_n(1-u) du \right. \\ &\quad + c \left(\vartheta K(m, m) - \vartheta \alpha_{[m]}^{\vartheta} - \vartheta \int_0^1 g_m(u) g_m(1-u) du \right) \\ &\quad + d \left(\vartheta K(p, p) - \vartheta \alpha_{[p]}^{\vartheta} - \vartheta \int_0^1 g_p(u) g_p(1-u) du \right) \\ &\quad - \vartheta c \left(\vartheta K(m, n) - \vartheta \int_0^1 g_n(u) g_m(1-u) du - \vartheta \alpha_{[m]} \alpha_{[n]} \right) \\ &\quad - \vartheta d \left(\vartheta K(p, n) - \vartheta \int_0^1 g_n(u) g_p(1-u) du - \vartheta \alpha_{[p]} \alpha_{[n]} \right) \\ &\quad + \vartheta cd \left(\vartheta K(m, p) - \vartheta \int_0^1 g_m(u) g_p(1-u) du - \vartheta \alpha_{[m]} \alpha_{[p]} \right) \\ &\quad \left. - \vartheta \lambda (1 - c - d) + \lambda^{\vartheta} \right\}^{\frac{1}{\vartheta}}. \end{aligned}$$

اما برای خلاصه نمودن طرف راست نابرابری بالا، توجه کنید که

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_i(u)g_j(1-u)du &= \int_0^1 \left\{ 1 - \alpha(1 - \alpha^{-i})(\alpha u - 1) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \alpha(1 - \alpha^{-j})(\alpha u - 1) \right\} du \\ &= \int_0^1 1 - \alpha^{\alpha} (1 - \alpha^{-i})(1 - \alpha^{-j})(\alpha u - 1)^{\alpha} du \\ &= 1 - \frac{\alpha^{\alpha}}{\alpha} (1 - \alpha^{-i})(1 - \alpha^{-j}). \end{aligned}$$

بدین ترتیب با توجه به این که

$$K(m, n) - \int_0^1 g_n(u)g_m(1-u)du = \alpha(K(m, n) - 1) = \alpha L(m, n),$$

نابرابری بالا به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\begin{aligned} \alpha_{[n]}(1 - \alpha c \alpha_{[m]} - \alpha d \alpha_{[p]}) &\leq \left\{ L(n, n) + c^{\alpha} (L(m, m) - \alpha_{[m]}^{\alpha}) \right. \\ &\quad + d^{\alpha} (L(p, p) - \alpha_{[p]}^{\alpha}) - \alpha c L(m, n) \\ &\quad - \alpha d L(p, n) + \alpha cd (L(m, p) - \alpha_{[m]} \alpha_{[p]}) \\ &\quad \left. - \lambda(1 - c - d) + \frac{1}{\alpha} \lambda^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

درست مانند برهان قضیه ۶ با در نظر گرفتن $d = -\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}c$ و مقدار بهینه λ

یعنی $\lambda = \alpha \left\{ 1 - c \left(1 - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} \right) \right\}$ مقدار بهینه c به صورت زیر به دست می آید:

$$c_{\text{opt}} = \frac{L^*(m, n) - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L^*(p, n)}{L^*(m, n) - \alpha \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L^*(m, p) + \left(\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} \right)^{\alpha} L^*(p, p)},$$

بدین ترتیب نابرابری به صورت مورد نظر خلاصه می شود.

۴ نتیجه‌گیری

برابری (۱۰) به ما اجازه می‌دهد تا خواص میانگین متغیر همراه رکوردهای بالا در مدل FGM را بدون نیاز به دانستن توزیع X و مستقیماً نسبت به خواص میانگین آماره‌ی ترتیبی دوم در یک نمونه‌ی دوتایی از توزیع Y بررسی کنیم. بدین ترتیب، می‌توان در این مدل خاص برآوردگرهای $\alpha_{[n]}$ را برحسب برآوردگرهای $\alpha_{2:2}$ به راحتی محاسبه کرد. همچنین فواصل اطمینان، آزمون‌های فرض و خواص حدی مربوط به پارامترهای بالا به راحتی قابل مقایسه هستند. همچنین، می‌توان روش‌های پیش‌تری را برای به دست آوردن کران‌های تقریبی در این مدل بررسی کرد. نویسندگان ترجیح می‌دهند در مقاله‌های بعدی مسائل بالا را مورد بررسی قرار دهند. البته باید توجه داشت که گرچه رده‌ی بالا می‌تواند شامل طیفی وسیع از توزیع‌های توأم باشد، اما فقط بخش بسیار کوچکی از کل است و همچنان مسئله‌ی اصلی، یعنی بررسی متغیر همراه در یک مدل کلی‌تر و یا مدل‌های پیش‌تر و کارآمدتر به عنوان هدف نهایی مورد توجه خواهد بود.

۵ قدردانی

نویسندگان از داوران محترم به خاطر پیشنهادات سازنده‌ی ایشان در تهیه‌ی نسخه‌ی نهایی این مقاله قدردانی می‌نمایند.

مرجع‌ها

- Arnold, B.C.; Balakrishnan, N.; Nagaraja, H.N. (1998). *Records*. Wiley, New York.
- Ahsanullah, M. (1994). Record values, random record models and concomitants, *J. Statist. Res.* **28**, 89-109.
- Ahsanullah, M. (2000). Concomitants of record values. *Pakistan J. Statist.* **16**, 207-215.
- Balakrishnan, N. (1990). Improving the Hartley-David-Gumbel bound for the mean of extreme order statistics, *Statist. Probab. Lett.* **9**, 291-294.
- David, H.A. (1981). *Order Statistics. Second Edition*, Wiley, New York.
- David, H.A.; Nagaraja H.N. (1988). Concomitants of order statistics, In *Handbook of Statist.* **16**, pp. 487-513.
- Gumbel, E.J. (1954). The maxima of the mean largest value and of the range, *Ann. Math. Statist.* **25**, 76-84.

- Hartley, H.O.; David, H.A. (1954). Universal bounds for mean rang and extreme observation. *Ann. Math. Statist.* **25**, 85-99.
- Houchens, R.L. (1984). Record Value Theory and Inference. *Ph.D. thesis*, University of California, Riverside, CA.
- Khaledi, B; Kochar, S.C. (2001). On dependence structure of multivariate mixture distributions. *Ann. Inst. Stat. Math.* **53**, 620-630.
- Moriguti, S. (1951). Extermal properties of extreme value distributions. *Ann. Math. Statist.* **22**, 523-536.
- Moriguti, S. (1954). Bounds for second moments of the sample range. *Rep. Stat. Appl. Res. JUSE* **2**, 99-103.
- Nagaraja, H.N. (1978). On the expected values of record values. *Aust. J. Statist.*, **20**, 176-182.
- Raqab, M.Z. ; Ahsanullah, M. (2002). Concomitants of ordered random variables – A review, *J. Stat. Theory App.* **1**, 15-26.
- Yang, S.S. (1977). General distribution theory of the concomitants of order statistics. *Ann. Statist.* **5**, 996-1002.

دریافت: ۱۷ خرداد ۱۳۸۴
 آخرین اصلاح: ۱۲ شهریور ۱۳۸۴

جعفر احمدی
 گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
 دانشگاه فردوسی مشهد،
 مشهد، ایران.
 پیام‌نگار: ahmadi@math.um.ac.ir

مرتضی امینی
 گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
 دانشگاه فردوسی مشهد،
 مشهد، ایران.
 پیام‌نگار: mort_amini@hotmail.com