



## ترتیب پراکندگی و سیستم‌های $k$ -out-of- $n$

بهاء‌الدین خالدی

دانشگاه شهید بهشتی، دانشگاه رازی کرمانشاه

چکیده. ساده‌ترین و معمول‌ترین روش برای مقایسه‌ی دو متغیر تصادفی استفاده از میانگین‌ها و واریانس‌هاست. در بسیاری از حالت‌ها ممکن است میانه‌ی متغیر تصادفی  $X$  بزرگ‌تر از میانه‌ی متغیر تصادفی  $Y$  باشد در صورتی‌که میانگین  $X$  کوچک‌تر از میانگین  $Y$  است. مسئله‌ی مشابه وقتی اتفاق می‌افتد که هدف، مقایسه‌ی پراکندگی جامعه‌ها باشد. اگر  $X$  و  $Y$  بر طبق یک ترتیب تصادفی مناسب مرتب شده باشند ناهماهنگی بالا به‌وجود نمی‌آید. در بسیاری از حالت‌ها مقایسه‌ی مشخصات تابعی از توزیع‌های احتمال تحت مطالعه، مانند توابع توزیع، توابع نرخ خطر، توابع میانگین باقیمانده، توابع معکوس یا توابع چندک و توابع مناسب دیگر بسیار مفیدتر از مقایسه بر اساس چند معیار عددی از توزیع‌هاست. مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی با استفاده از توابع یاد شده در بالا معمولاً ترتیبی جزئی میان توزیع‌های احتمال به‌وجود می‌آورد. این مقایسه‌ها را ترتیب تصادفی می‌نامیم. در این مقاله ضمن ارائه‌ی مفاهیم و قضیه‌های مرتبط با نظریه‌ی ترتیب پراکندگی، مثال‌ها و کاربردهایی از نظریه‌ی یاد شده ارائه می‌شود. به‌طور خاص به مقایسه‌ی تصادفی آماره‌های مرتب و فاصله‌ها با استفاده از نظریه‌ی بالا می‌پردازیم. همچنین حالت‌هایی که مشاهدات توزیع یکسان داشته باشند یا نه، مورد مطالعه قرار می‌گیرند و در بیش‌تر حالت‌ها فرض می‌کنیم که مشاهدات مستقل‌اند.

واژگان کلیدی. توزیع نمایی؛ ترتیب تصادفی معمول؛ ترتیب نرخ خطر؛ ترتیب نسبت درستنمایی؛ مدل‌های نرخ خطر متناسب؛ ترتیب بیش‌اندن؛ و  $p$ -بزرگ‌تر؛ تابع‌های شور؛ سیستم‌های  $k$ -out-of- $n$ ؛ فاصله‌ها.

## ۱ مقدمه

پدیده‌های تصادفی، اغلب پیچیده‌اند. مدل‌سازی آن‌ها و تعیین کران‌ها و تقریب‌ها برای مشخصه‌های مورد توجه و مهم آن مدل‌ها از دیدگاه کاربردی مهم و مفیدند. به عبارت دیگر، تقریبی از یک مدل تصادفی با استفاده از یک مدل ساده‌تر و یا به وسیله‌ی یک مدل که از مؤلفه‌های ساده تشکیل شده است می‌تواند کران‌ها و تقریب‌های مناسبی از برخی مشخصه‌های خاص و مطلوب مدل مورد مطالعه به دست دهد. ایده‌ی ترتیب تصادفی نخستین بار توسط لی‌من (۱۹۵۵) ارائه شد و با گذشت سال‌ها برای مقایسه توزیع‌های احتمال، چندین ترتیب تصادفی مختلف معرفی شده است. در این مقاله، توجه خود را بر ترتیب پراکندگی که یک ترتیب جزئی مفید برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال است معطوف می‌سازیم و چندین مثال از آماره‌ها که با ترتیب پراکندگی مرتب می‌شوند ارائه می‌کنیم.

ابتدا ترتیب‌های تصادفی مورد نیاز در این مقاله را مرور می‌کنیم. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع احتمال، تابع بقا و نرخ خرابی متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  را به ترتیب با  $f$  و  $g$ ،  $F$  و  $G$ ،  $\bar{F}$  و  $\bar{G}$ ،  $r_F$  و  $r_G$  نشان می‌دهیم. در سراسر این مقاله «صعودی» به معنای غیر نزولی و «نزولی» به معنای غیر صعودی است.

تعریف ۱ متغیر تصادفی  $Y$  در ترتیب تصادفی معمولی از  $X$  کوچک‌تر است ( $Y \leq_{st} X$ ) اگر برای هر  $x$  داشته باشیم:

$$(۱) \quad \bar{G}(x) \leq \bar{F}(x).$$

از (۱) نتیجه می‌شود که برای هر  $p \in (0, 1)$

$$G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p),$$

و به همین ترتیب برای هر تابع صعودی  $\phi: R \rightarrow R$  که امید ریاضی آن نسبت به  $X$  و  $Y$  موجود باشد:

$$(۲) \quad E\{\phi(Y)\} \leq E\{\phi(X)\}.$$

یک نظریه‌ی قوی‌تر از ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر (hazard rate ordering) است.

تعریف ۲ می‌گوییم متغیر تصادفی  $Y$  در ترتیب نرخ خطر از  $X$  کوچک‌تر است ( $Y \leq_{hr} X$ ) اگر

$$(۳) \quad \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)}$$

نسبت به  $x$  صعودی باشد.

فرض کنید  $X_t$  متغیر تصادفی توصیف‌کننده‌ی باقیمانده‌ی طول عمر یک متغیر تصادفی  $X$  در  $t$  به شرط  $X > t$  باشد. به عبارت دیگر،  $X_t$  با  $X - t | X > t$  هم‌توزیع است و دارای تابع بقای  $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}$  است. بنا بر این،  $Y \leq_{hr} X$  اگر و فقط اگر برای هر  $t > 0$  داشته باشیم  $Y_t \leq_{st} X_t$ .  
 به بیان دیگر، توزیع‌های شرطی، به شرط آن‌که متغیرهای تصادفی دست‌کم از یک اندازه‌ی معین هستند، طبق ترتیب تصادفی معمولی مرتب می‌شوند. در حالتی که نرخ‌های خطر موجود باشند، اگر  $Y \leq_{hr} X$  و فقط اگر برای هر  $x$ ،  $r_F(x) \leq r_G(x)$ . ترتیب بر اساس نرخ خطر به ترتیب تصادفی یکنواخت نیز مشهور است.

**تعریف ۳** می‌گوییم متغیر تصادفی  $Y$  در ترتیب نسبت درستیابی از  $X$  کوچک‌تر است ( $Y \leq_{lr} X$ ) اگر  $\frac{f(x)}{g(x)}$  نسبت به صعودی باشد. هنگامی که تکیه‌گاه‌های  $X$  و  $Y$  دارای یک نقطه‌ی پایانی مشترک در سمت چپ هستند داریم:

$$Y \leq_{lr} X \Rightarrow Y \leq_{hr} X \Rightarrow Y \leq_{st} X.$$

برای جزئیات بیشتر تر به لی من و روهو (۱۹۹۲) مراجعه شود.

اکنون ترتیب تصادفی چندمتغیره میان دو بردار تصادفی را تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۴** بردار تصادفی  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  در ترتیب تصادفی چندمتغیره کوچک‌تر از بردار تصادفی  $X = (X_1, \dots, X_n)$  است ( $Y \leq_{st} X$ ) اگر برای هر تابع صعودی  $\phi: R^n \rightarrow R$  داشته باشیم:

$$\phi(Y) \leq_{st} \phi(X).$$

ترتیب تصادفی چندمتغیره، ترتیب تصادفی مؤلفه به مؤلفه را نتیجه می‌دهد.

در این مقاله از مفهوم بیشاندن (majorization) نیز استفاده می‌شود که آن را تعریف می‌کنیم. فرض

کنید  $\{x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}\}$  نمایشگر ترتیب صعودی از مؤلفه‌های بردار  $x = (x_1, \dots, x_n)$  باشد. می‌گوییم بردار  $x$  بردار  $y$  را می‌بیشاند ( $x \succ^m y$ ) اگر برای هر  $j$ ،  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ،  $\sum_{i=1}^j x_{(i)} = \sum_{i=1}^j y_{(i)}$  و  $\sum_{i=1}^j x_{(i)} \leq \sum_{i=1}^j y_{(i)}$  تابعی که رابطه‌ی ترتیب بیشاندن را حفظ کند تابع محدب شور (schur convex) است. برای جزئیات بیشتر تر به مارشال و اولکین (۱۹۷۹) نگاه کنید. بردار  $x$  بردار  $y$  را به‌طور ضعیف می‌بیشاند ( $x \succ^w y$ ) اگر برای هر  $j$ ،  $j = 1, 2, \dots, n$ ،

$$\sum_{i=1}^j x_{(i)} \leq \sum_{i=1}^j y_{(i)}.$$

بن و پالتانه (۱۹۹۹) به ترتیب تازه‌ای در  $\mathbb{R}^{+n}$  پرداختند که آن را  $p$ -بزرگ‌تر (p-larger) نامیدند. بردار  $x$  در  $\mathbb{R}^{+n}$ ،  $p$ -بزرگ‌تر از بردار  $y$  در  $\mathbb{R}^{+n}$  است  $(x \succcurlyeq^p y)$  اگر برای هر  $j$ ،  $j = 1, 2, \dots, n$ ،

$$\prod_{i=1}^j x_{(i)} \leq \prod_{i=1}^j y_{(i)}.$$

مارشال و الکین (۱۹۷۹) ثابت کرده‌اند که برای هر تابع مقعر  $g$ :

$$x \succcurlyeq^m y \Rightarrow (g(x_1), \dots, g(x_n)) \succcurlyeq^w (g(y_1), \dots, g(y_n)),$$

و چون تابع لگاریتم یک تابع محدب است داریم:

$$x \succcurlyeq^m y \Rightarrow x \succcurlyeq^p y,$$

که عکس آن برقرار نیست. برای مثال روشن است که  $(1, 2, 3) \succcurlyeq^p (1, 2, 5)$ ، ولی رابطه‌ی بیشاندن برقرار نیست.

یک مفهوم بنیادی برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال، ترتیب پراکندگی است که در زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵ می‌گوییم متغیر تصادفی  $Y$  در ترتیب پراکندگی از  $X$  کوچکتر است ( $Y \leq X$ ) اگر

$$(4) \quad G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha) \leq F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha), \quad 0 < \alpha \leq \beta < 1$$

همچنین در صورت وجود تابع‌های چگالی احتمال،  $Y \leq_{disp} X$  اگر و فقط اگر برای هر  $p \in (0, 1)$  داشته باشیم:

$$f(F^{-1}(p)) \leq g(G^{-1}(p)).$$

همچنین  $Y \leq_{disp} X$ ، اگر و فقط اگر رابطه‌های هم‌ارز زیر برقرار باشند:

$$(A) \quad F^{-1}G(x) - x \text{ نسبت به } x \text{ صعودی باشد؛}$$

(ب) اگر توابع چگالی احتمال موجود باشند، برای هر  $p \in (0, 1)$

$$(5) \quad r_F(F^{-1}(p)) \leq r_G(G^{-1}(p)).$$

(ج) برای هر  $p \in (0, 1)$

$$Y_{G^{-1}(p)} \leq_{st} X_{F^{-1}(p)}.$$

داکسم (۱۹۶۹) وقتی روی کارایی آزمون‌های ناپارامتری کاملاً صحیح در حال مطالعه بود، این نوع ترتیب را ترتیب دنباله‌ای نامید. یاناکیموتو و سیویا (۱۹۷۶) ثابت کردند اگر (۴) برقرار باشد  $X$  به‌طور تصادفی از  $Y$  پخش‌تر است. ساندرز و موران (۱۹۷۸)، بیگل و لی من (۱۹۷۹)، لویس و تامپسون (۱۹۸۱) و شیکد (۱۹۸۲) این نوع ترتیب را به‌عنوان یک ترتیب تصادفی برای مقایسه‌ی پراکندگی توزیع‌های احتمال مورد مطالعه قرار دادند. دشپانده و کوچار (۱۹۸۳) هم‌ارزی میان این مفاهیم را بررسی کرده‌اند و برخی ارتباطات موجود میان ترتیب پراکندگی و برخی دیگر از ترتیب‌های خاص را مورد توجه قرار داده‌اند. دشپانده و کوچار (۱۹۸۲) و دشپانده و متا (۱۹۸۲) از ترتیب پراکندگی در برخی از مسائل استنباطی برای به‌دست آوردن کران‌هایی برای کارایی آزمون‌ها و احتمال‌های انتخاب‌های صحیح استفاده کردند.

در ادامه به برخی از خاصیت‌های مهم ترتیب پراکندگی اشاره می‌شود.

خاصیت ۱. ترتیب پراکندگی نسبت به تغییرات مکانی پایدار است:

$$Y \underset{disp}{\leq} X \Rightarrow Y + c \underset{disp}{\leq} X + d \quad \text{برای هر } c \text{ و } d \text{ حقیقی،}$$

$$X \underset{disp}{\leq} \sigma X \quad \text{خاصیت ۲. به‌ازای } \sigma > 1,$$

$$Y \underset{disp}{\leq} X \Rightarrow -Y \underset{disp}{\leq} -X \quad \text{خاصیت ۳.}$$

خاصیت ۴. لویس و تامپسون (۱۹۸۱) نشان داده‌اند که اگر  $Z$  متغیری تصادفی و مستقل از  $X$  و  $Y$  باشد و  $Y \underset{disp}{\leq} X$  آن‌گاه  $Y + Z \underset{disp}{\leq} X + Z$  اگر و فقط اگر  $Z$  دارای تابع چگالی لگ‌کاو (log-concave) باشد.

خاصیت ۵. اگر تکیه‌گاه‌های  $X$  و  $Y$  دارای نقطه‌ی چپ پایانی مشترک باشند، آن‌گاه

$$Y \underset{disp}{\leq} X \Rightarrow Y \underset{st}{\leq} X.$$

خاصیت ۶. روهو و هی (۱۹۹۱) نشان داده‌اند که اگر  $Y \underset{disp}{\leq} X$  و  $Y \underset{st}{\leq} X$ ، آن‌گاه به‌ازای هر تابع صعودی محدب و یا نزولی مقعر  $\phi$ ،

$$\phi(Y) \underset{disp}{\leq} \phi(X).$$

خاصیت ۷. به‌ازای هر تابع محدب  $\phi$ ،

$$Y \underset{disp}{\leq} X \Rightarrow E\{\phi(Y - E(Y))\} \leq E\{\phi(X - E(X))\},$$

به این شرط که امیدهای ریاضی موجود باشند. در حالت خاص از  $Y \leq_{disp} X$  نتیجه می شود:

$$E|Y - E(Y)| \leq E|X - E(X)| \quad \text{و} \quad Var(Y) \leq Var(X).$$

برای جزئیات بیشتر در باره ی ترتیب های تصادفی یاد شده در بالا به فصل دوم بخش 2.B از شیکد و سانتیکومار (۱۹۹۴) رجوع شود.

با توجه به رابطه ی (۵)، رابطه ای اساسی و بنیادی میان ترتیب نرخ خطر و ترتیب پراکندگی وجود دارد، به طور واضح تر در نتیجه ی زیر که در باگای و کوچار (۱۹۸۶) آورده شده است این رابطه ارائه می شود.

قضیه ی ۱ با این فرض که  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی نامنفی باشند:

$$\text{آ) اگر } Y \leq_{hr} X \text{ یا } F \text{ یا } G, \text{ نرخ خطر نزولی (DFR) باشند، آن گاه } Y \leq_{disp} X;$$

$$\text{ب) اگر } Y \leq_{disp} X \text{ یا } F \text{ یا } G, \text{ نرخ خطر صعودی (IFR) باشند، آن گاه } Y \leq_{hr} X.$$

گاهی به آسانی نمی توان ترتیب نرخ خطر یا ترتیب پراکندگی بین دو متغیر تصادفی را به طور مستقیم از تعریف هایشان برقرار کرد، در چنین مواقعی نتایج بالا می توانند برای اثبات برقراری ترتیب های بالا بین متغیرهای تصادفی بسیار سودمند باشند. در زیر مثال جالبی ارائه می شود.

مثال. فرض کنید  $X_{\gamma}$  متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکل صحیح  $\gamma$  باشد. برای  $1 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$  نشان می دهیم که

$$X_{\gamma_1} \leq_{disp} X_{\gamma_2} \quad \text{و} \quad X_{\gamma_1} \leq_{hr} X_{\gamma_2}.$$

می توان  $X_{\gamma_2}$  را به صورت  $X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2 - \gamma_1}$  نشان داد به طوری که  $X_{\gamma_2 - \gamma_1}$  متغیر تصادفی گامای مستقل از  $X_{\gamma_1}$  با پارامتر شکل  $\gamma_2 - \gamma_1$  باشد که عددی صحیح است. علاوه بر این  $X_{\gamma_1}$ ، مجموع  $\gamma_1$  تا متغیر تصادفی نمایی مستقل است که دارای توابع چگالی احتمال لگ کاواست. با توجه به خاصیت ۴:

$$(۶) \quad X_{\gamma_1} \leq_{disp} X_{\gamma_2}.$$

چون  $X_{\gamma_1}$  به ازای  $1 \leq \gamma_1$  IFR است با توجه به قسمت ب) از قضیه ی ۱ و رابطه ی (۶) داریم  $X_{\gamma_1} \leq X_{\gamma_2}$ .

ساندرز و موران (۱۹۷۸) و شیکد (۱۹۸۲) نتایج بالا را برای متغیرهای تصادفی گاما با هر پارامتر شکل دلخواهی به کمک روش های تحلیلی پیچیده ای ثابت کردند. تکنیک زیر از ساندرز و موران (۱۹۷۸) برای برقرار ساختن ترتیب پراکندگی میان اعضای یک خانواده ی پارامتری از توزیع های احتمال بسیار سودمند است.

قضیه‌ی ۲ فرض کنید  $X_a$  متغیری تصادفی با تابع توزیع  $F_a$  برای هر  $a \in \mathbb{R}$  باشد به طوری که

(آ)  $F_a$  روی بازه‌ی  $(0, \infty)$   $(x_-^{(a)}, x_+^{(a)}) \subseteq (0, \infty)$  معتبر بوده و  $f_a$  تابع چگالی احتمال آن روی هیچ‌یک از زیربازه‌های  $(x_-^{(a)}, x_+^{(a)})$  صفر نباشد؛

(ب) با در نظر گرفتن  $F'_a$  به‌عنوان مشتق  $F_a$  نسبت به  $a$  به شرط موجود بودن آن برای هر  $a, a^* \in \mathbb{R}$  و  $a > a^*$

$$(۷) \quad X_a \underset{disp}{\geq} X_{a^*},$$

اگر و فقط اگر،

$$(۸) \quad \text{نسبت به } x \text{ نزولی باشد.} \quad \frac{F'_a(x)}{f_a(x)}$$

احمد و همکاران (۱۹۸۶) رابطه‌های زیر را زبرجمعی (super-additive) و ترتیب پراکندگی برای متغیرهای تصادفی نامنفی برقرار ساختند.  $G$  نسبت به  $F$  زبرجمعی نامیده می‌شود اگر برای هر  $x$  و  $y$  از دامنه‌ی  $G$

$$F^{-1}G(x+y) \geq F^{-1}G(x) + F^{-1}G(y).$$

قضیه‌ی ۳ اگر  $Y \underset{su}{\leq} X$  و  $Y \underset{st}{\leq} X$ ، آن‌گاه  $Y \underset{disp}{\leq} X$ .

قضیه‌ی ۴ اگر  $Y \underset{su}{\leq} X$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F^{-1}G(x)}{x} \geq 1$ ، آن‌گاه  $Y \underset{disp}{\leq} X$ .

پیش از این نیز رابطه‌های مشابهی میان ترتیب پراکندگی و دیگر ترتیب‌های جزئی عمرکردن، از قبیل ترتیب محدب (convex-ordering) و ترتیب ستاره (star-ordering) توسط دشپانده و کوچار (۱۹۸۳) سانه (۱۹۸۴) و بارتوزویچ (۱۹۸۵a و ۱۹۸۵b) به‌دست آمده بود. یکی از نتایج  $Y \underset{disp}{\leq} X$  این است که  $|Y_1 - Y_2|$  به‌طور تصادفی از  $|X_1 - X_2|$  کوچک‌تر است که نتیجه می‌دهد:

$$E(|Y_1 - Y_2|) \leq E(|X_1 - X_2|) \quad \text{و} \quad \text{Var}(Y) \leq \text{Var}(X),$$

به طوری که  $X_1$  و  $X_2$  (و  $Y_1$  و  $Y_2$ ) دو نمونه‌ی مستقل از  $X$  (و  $Y$ ) می‌باشند. بارتوزویچ (۱۹۸۶) این نتیجه را به فاصله‌های (spacings) یک نمونه‌ی تصادفی  $n$  تایی گسترش داد، چنانکه در زیر آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۵ فرض کنید  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$  آماره‌های مرتب یک نمونه‌ی تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  از توزیع  $F$  باشند. همچنین  $Y_{1:n}, \dots, Y_{n:n}$  نیز آماره‌های مرتب از نمونه‌ی تصادفی  $Y_1, \dots, Y_n$  از

توزیع  $G$  باشند، فاصله‌های متناظر را با  $U_{i:n} \equiv X_{i:n} - X_{i-1:n}$  و  $V_{i:n} \equiv Y_{i:n} - Y_{i-1:n}$  برای  $i = 1, \dots, n$  نمایش می‌دهیم به طوری که  $X_{0:n} = Y_{0:n} \equiv 0$ . بنا بر این:

$$Y \underset{disp}{\leq} X \Rightarrow (V_{1:n}, \dots, V_{n:n}) \stackrel{st}{\preceq} (U_{1:n}, \dots, U_{n:n}),$$

اما نتایجی که از قضیه‌ی ۵ گرفته می‌شود در زیر می‌آید.

نتیجه‌ی ۱ تحت شرایط قضیه‌ی ۵:

(آ) برای  $1 \leq i < j \leq n$ ،  $Y_{j:n} - Y_{i:n} \underset{st}{\leq} X_{j:n} - X_{i:n}$  و در حالت خاص

$$Y_{n:n} - Y_{1:n} \underset{st}{\leq} X_{n:n} - X_{1:n}$$

(ب)  $s_{Y \underset{st}{\leq} X}^{\downarrow} \leq s_X^{\downarrow}$  که  $s_X^{\downarrow}$  و  $s_Y^{\downarrow}$  واریانس‌های نمونه‌ای هستند؛

(ج)  $\eta_Y \underset{st}{\leq} \eta_X$  که

$$\eta_X = \left[ \binom{n}{2} \right]^{-1} \sum_{i < j} |X_{j:n} - X_{i:n}|,$$

میانگین جینی برای نمونه‌ی  $X$  است و  $\eta_Y$  نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

برهان.

(آ) با یافتن مجموع مؤلفه‌های متناظر بردارهای تصادفی  $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$  و

$(V_{1:n}, \dots, V_{n:n})$  از  $i+1$  تا  $j$  و با استفاده از قضیه‌ی ۵ اثبات کامل است.

(ب) با نمایش واریانس نمونه‌ای به صورت

$$\begin{aligned} s_X^{\downarrow} &= \{n(n-1)\}^{-1} \sum_{i < j} (X_{j:n} - X_{i:n})^2 \\ &= \{n(n-1)\}^{-1} \sum_{i < j} (U_{j:n} + U_{j-1:n} + \dots + U_{i+1:n})^2, \end{aligned}$$

که به روشنی تابعی صعودی از  $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$  است و چون توابع صعودی از بردارهای تصادفی مرتب شده بر مبنای ترتیب تصادفی معمولی، خود بر مبنای همین ترتیب مرتبند، اثبات با توجه به قضیه‌ی ۵ کامل می‌شود.

(ج) با توجه به اثبات قضیه‌ی قبل و (ب) از نتیجه‌ی ۱، میانگین جینی را می‌توان به صورت تابعی صعودی از بردار فاصله‌ها نوشت.



در بخش ۲، نتایجی از ترتیب پراکندگی را میان آماره‌های مرتب متوالی که از یک توزیع DFR باشند، بیان می‌کنیم. به دلیل اهمیت ویژه سیستم‌های موازی در نظریه قابلیت اعتماد، در بخش ۳ صرفاً به مطالعه‌ی آن‌ها با مؤلفه‌های نمایی مستقل و غیرهم‌توزیع می‌پردازیم. همچنین به این می‌پردازیم که چگونه تغییر پارامترهای توزیع‌ها، روی طول عمر سیستم‌های موازی از دیدگاه‌های ترتیب پراکندگی و نرخ خطر تأثیر می‌گذارند و در ادامه نتایج را به مدل‌های نرخ خطر متناسب (PHR) تعمیم می‌دهیم. در بخش ۴ نیز به مطالعه‌ی ترتیب پراکندگی میان فاصله‌های نرمال شده از برخی خانواده‌ی توزیع‌ها می‌پردازیم.

## ۲ ترتیب پراکندگی میان آماره‌های مرتب

آماره‌های مرتب به‌طور کلی در آمار و به‌طور خاص در قابلیت اعتماد نقش مهمی بازی می‌کنند. زمان شکست یک سیستم  $k$ -out-of- $n$  مطابق با  $(n - k + 1)$  امین آماره‌ی مرتب است. در حالت خاص، رخ دادن طول عمر یک سیستم موازی، مشابه بزرگ‌ترین آماره‌ی مرتب و رخ دادن طول عمر یک سیستم سری، مشابه کوچک‌ترین آماره‌ی مرتب است. سیستم‌های موازی و سری ساده‌ترین مثال‌ها از سیستم‌های منسجم (coherent) هستند که بدنه‌ی آن‌ها بیش‌تر سیستم‌های موازی پیچیده‌اند. برای حالتی که مؤلفه‌های چنین سیستم‌هایی دارای توزیع‌های احتمال مستقل و مشابه باشند مطالب بسیاری تحت بررسی قرار گرفته است. اما در زندگی واقعی، سیستم‌ها معمولاً از مؤلفه‌هایی تشکیل می‌شوند که طول عمرشان به‌طور مشابه توزیع نشده‌اند و بیش‌تر آن‌ها وابسته‌اند، مانند مؤلفه‌هایی که در یک محیط مشترک کار می‌کنند. چون نظریه‌ی توزیع چنین سیستم‌هایی کاملاً پیچیده است، نتایج کمی در حالت کلی در دسترس است. در این بخش نتایجی از ترتیب پراکندگی میان آماره‌های مرتب که از توزیع‌هایی با نرخ خطر نزولی هستند، ارائه می‌شود.

برای هر  $i = 1, \dots, n$ ،  $X_{i:n}$  را به‌عنوان  $i$ امین آماره‌ی مرتب از یک مجموعه‌ی  $n$  تایی متغیرهای تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  در نظر می‌گیریم. احتیاجی نیست که  $X_i$ ها مستقل یا هم‌توزیع باشند. در حالتی که  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR باشند، دیوید و گرون‌ولد (۱۹۸۲) ثابت کردند که برای  $1 \leq i < j \leq n$ ،  $\text{var}(X_{i:n}) \leq \text{var}(X_{j:n})$ . کوچار (۱۹۹۶a) این نتیجه را به  $X_{i:n} \leq_{disp} X_{j:n}$  برای  $1 \leq i < j \leq n$  تعمیم داد. خالدی و کوچار (۲۰۰۰a) همین نتیجه را برای مقایسه آماره‌های مرتب نمونه‌های تصادفی با اندازه‌ی نمونه‌های نابرابر از توزیع‌های DFR تعمیم دادند.

قضیه‌ی ۶ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR باشد، بنا بر این برای  $i \leq j$

و  $n - i \geq m - j$  خواهیم داشت:

$$(9) \quad X_{i:n} \underset{disp}{\leq} X_{j:m}.$$

برای اثبات این قضیه ابتدا به حالتی که توزیع مورد نظر نمایی باشد می‌پردازیم. بولاند و همکاران (۱۹۹۸) همین قضیه را در حالتی که اندازه نمونه‌ها برابر باشند ثابت کرده‌اند.

لم ۱ فرض کنید  $X_{i:n}$  آمین آماره‌ی مرتب از یک نمونه‌ی  $n$  تایی از توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  باشد. در این صورت برای  $j \leq i$  و  $n - i \geq m - j$ ،

$$(10) \quad X_{i:n} \underset{disp}{\leq} X_{j:m}.$$

برهان. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  و  $X'_1, \dots, X'_m$  دو نمونه‌ی تصادفی  $n$  تایی و  $m$  تایی مستقل نمایی با نرخ خطر  $\lambda$  باشند. آمین آماره‌ی مرتب  $X_{i:n}$  را می‌توان به صورت مجموعی از تفاضل‌های مکرر نوشت:

$$(11) \quad X_{i:n} = (X_{i:n} - X_{i-1:n}) + \dots + (X_{2:n} - X_{1:n}) + X_{1:n} \\ \stackrel{st}{=} \sum_{k=1}^i E_{n-i+k},$$

به طوری که برای هر  $k, i, \dots, 1$ ،  $E_{n-i+k}$  یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ خطر  $(n - i + k)\lambda$  است و همچنین به روشنی  $E_{n-i+k}$ ‌ها از یکدیگر مستقل‌اند. به طور مشابهی برای  $X'_{j:m}$  نیز داریم:

$$(12) \quad X'_{j:m} \stackrel{st}{=} \sum_{k=1}^j E'_{m-j+k}.$$

به طور مشابه برای هر  $k, j, \dots, 1$ ،  $E'_{m-j+k}$  یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ خطر  $(m - j + k)\lambda$  است و همچنین به روشنی  $E'_{m-j+k}$ ‌ها از یکدیگر مستقل‌اند. رابطه‌ی  $E'_{m-j+1} \underset{disp}{\leq} E_{n-i+1}$  برای هر  $n - i \geq m - j$  با استفاده از تعریف ترتیب پراکندگی برقرار است. از آن جا که رده‌ی توزیع‌هایی که دارای توابع چگالی احتمال با خاصیت لگ کاوی می‌باشند، دارای پیش‌س‌هایی هستند که دارای توابع چگالی احتمال لگ کاو می‌باشند (مراجعه نمایید به دارمادهاکاری و جاگ دف (۱۹۸۸)، ص ۱۷)، با به‌کارگیری مکرر خاصیت ۴ داریم:

$$(13) \quad \sum_{k=1}^i E_{n-i+k} \underset{disp}{\leq} \sum_{k=1}^j E'_{m-j+k}.$$

همچنین از آن جا که  $\sum_{k=i+1}^j E'_{m-j+k}$ ، مجموع متغیرهای تصادفی نمایی مستقل دارای تابع چگالی احتمال با خاصیت لگ کاو و نیز از  $\sum_{k=1}^i E'_{m-j+k}$  مستقل است، با پیروی از خاصیت ۴، برای هر  $i \leq j$  طرف راست (۱۳) از  $\sum_{k=1}^j E'_{m-j+k}$  کم پراکنده‌تر است. بنا بر این،

$$X_{i:n} \stackrel{disp}{=} \sum_{k=1}^i E_{n-i+k} \leq \sum_{k=1}^j E'_{m-j+k} \stackrel{disp}{=} X'_{j:m}.$$

چون  $X_{j:m}$  و  $X'_{j:m}$  دارای یک توزیع‌اند، (۱۰) ثابت می‌شود. برهان لم زیر در بارتوزویج (۱۹۸۷) داده شده است.

لم ۲ فرض کنید  $\phi: R^+ \rightarrow R^+$  تابعی باشد به طوری که  $\phi(0) = 0$  و  $\phi(x) - x$  صعودی باشد. در این صورت، برای هر تابع محدب و اکیداً صعودی  $\psi: R^+ \rightarrow R^+$  تابع  $\psi\phi\psi^{-1}(x) - x$  صعودی است.

اکنون برهانی برای قضیه ۶ ارائه می‌دهیم.

برهان. تابع توزیع  $X_{j:m}$  عبارت است از  $F_{j:m}(x) = B_{j:m}F(x)$  به طوری که  $B_{j:m}$  دارای توزیع بنا با پارامترهای  $(j, m - j + 1)$  است. فرض کنید  $G$  تابع توزیع متغیر تصادفی نمایی با میانگین یک باشد. پس  $H_{j:m}(x) = B_{j:m}G(x)$  تابع توزیع زامین آماری مرتب نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از توزیع میانگین یکتای نمایی خواهد بود. همچنین می‌توانیم نشان دهیم که

$$\begin{aligned} F_{j:m}(x) &= B_{j:m}GG^{-1}F(x) \\ (14) \quad &= H_{j:m}G^{-1}F(x). \end{aligned}$$

برای اثبات، نشان می‌دهیم که برای  $i \leq j$  و  $n - i \geq m - j$

$$\begin{aligned} F^{-1}GH_{j:m}^{-1}H_{i:n}G^{-1}F(x) - x &\text{ اگر و فقط اگر } x \text{ صعودی است نسبت به } F_{j:m}^{-1}F_{i:n}(x) - x \\ (15) \quad &\text{نسبت به } x \text{ صعودی باشد.} \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱، برای  $i \leq j$  و  $n - i \geq m - j$  نیز نسبت به  $x$  صعودی است.

همچنین تابع  $\psi(x) = F^{-1}G(x)$  اکیداً صعودی و محدب است اگر  $F$  DFR باشد. اکنون

نتیجه‌ی لازم از لم ۲ به دست می‌آید.

نکته. از قضیه‌ی ۶ نتیجه می‌شود که برای یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع DFR به‌زای هر  $i, i = 1, \dots, n$ ,

$$X_{i:n+1} \underset{disp}{\leq} X_{i:n} \underset{disp}{\leq} X_{i+1:n+1}.$$

برای برقراری نتیجه‌ی بالا فرض DFR، بسیار مهم است. برای مثال می‌توان نشان داد که در حالت یک نمونه‌ی تصادفی دوتایی از توزیع یکنواخت  $(0, 1)$  که DFR نیست، واریانس  $X_{1:2}$  از واریانس  $X_{2:2}$  کوچک‌تر نیست.

حال به مسئله‌ی مقایسه‌ی آماره‌های مرتب وقتی که مشاهدات مستقل و غیرهم‌توزیع باشند، می‌پردازیم. بولاند، النویهی و پروشان (۱۹۹۴) نشان دادند که اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند، برای  $1 \leq i < j \leq n$  داریم  $X_{i:n} \underset{hr}{\leq} X_{j:n}$ . با استفاده از این و قضیه‌ی ۱ به قضیه‌ی زیر می‌رسیم. قضیه‌ی ۷ اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل باشند آن‌گاه برای  $1 \leq i < j \leq n$  داریم  $X_{i:n} \underset{disp}{\leq} X_{j:n}$  اگر DFR باشد.

حتا اگر نمونه‌ی ما از توزیع DFR باشد، ممکن است  $X_{i:n}$  برای هر  $i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  DFR باشد. اما کوچک‌ترین آماره‌ی مرتب تحت این حالت همواره DFR است. این ادعا نتیجه‌ی این حقیقت است که نرخ خطر مؤلفه‌های مستقل یک سیستم سری مجموع نرخ خطر مؤلفه‌هاست. بنا بر این، اگر هر مؤلفه سیستم سری نرخ خطر نزولی داشته باشد، سیستم دارای خاصیت DFR است. از این مشاهده نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه‌ی ۲ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل DFR باشند. در این صورت برای هر  $j, 1 < j \leq n$  داریم،

$$X_{1:n} \underset{disp}{\leq} X_{j:n}.$$

از این نتیجه در می‌یابیم که در میان همه‌ی سیستم‌های  $k$ -out-of- $n$  ساخته شده از مؤلفه‌ی مستقل DFR، سیستم سری کم پراکنده‌ترین است ولی بیش‌ترین نرخ خطر را دارد. ترتیب پراکندگی میان سیستم‌های سری از مؤلفه‌های DFR مستقل، وقتی تعداد مؤلفه‌ها مختلف هستند در قضیه‌ی زیر بیان شده است.

قضیه‌ی ۸ فرض کنید  $X_1, \dots, X_{n+1}$  متغیرهای مستقل DFR باشند. در این صورت،

$$X_{1:n+1} \underset{disp}{\leq} X_{1:n}.$$

برهان. چون نرخ خطر  $X_{1:n}$  کم‌تر از  $X_{1:n+1}$  است و  $X_{1:n}$  تحت شرایط مفروض دارای توزیع DFR است، از قضیه‌ی ۱ حکم قضیه، نتیجه می‌شود.  
در قضیه‌ی بعد ترتیب پراکندگی را میان آماره‌های مرتب وقتی که نمونه‌های تصادفی از توزیع‌های مختلف گرفته شده باشند، توسعه می‌دهیم.

قضیه‌ی ۹ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع پیوسته‌ی  $F$  باشد و  $Y_1, \dots, Y_m$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع پیوسته‌ی  $G$  باشد. اگر یکی از  $F$  یا  $G$  DFR باشد، آن‌گاه برای  $j \leq i$  و  $n - i \geq m - j$

$$(۱۶) \quad X \underset{disp}{\leq} Y \Rightarrow X_{i:n} \underset{disp}{\leq} Y_{j:m}.$$

برهان. فرض کنید  $F$ ، DFR باشد (اثبات در حالتی که  $G$ ، DFR باشد مشابه است). با استفاده از قضیه‌ی ۶ برای  $j \leq i$  و  $n - i \geq m - j$  داریم  $X_{i:n} \underset{disp}{\leq} Y_{j:m}$ . بارتوزویج (۱۹۸۶) ثابت کرد که اگر  $X \underset{disp}{\leq} Y$  آن‌گاه  $X_{j:m} \underset{disp}{\leq} Y_{j:m}$ . با ترکیب این نتایج، نتیجه‌ی مورد نظر ثابت می‌شود.  
چون فرض  $X \underset{hr}{\leq} Y$  به همراه شرط DFR بودن  $F$  یا  $G$ ، رابطه‌ی  $X \underset{disp}{\leq} Y$  را نتیجه می‌دهد، از قضیه‌ی بالا نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

نتیجه‌ی ۳ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ی تصادفی  $n$  تایی از توزیع پیوسته‌ی  $F$  و همچنین  $Y_1, \dots, Y_m$  نمونه‌ی تصادفی  $m$  تایی از توزیع پیوسته‌ی  $G$  باشد. اگر یکی از توزیع‌های  $F$  یا  $G$  DFR باشد، آن‌گاه برای  $j \leq i$  و  $n - i \geq m - j$

$$X \underset{hr}{\leq} Y \Rightarrow X_{i:n} \underset{disp}{\leq} Y_{j:m}.$$

کوچار (۱۹۹۶b) نتیجه‌ای مشابه برای زمان‌های رخداد یک فرایند پواسون ناهمگن (یا به طور معادل برای مقادیر رکورد) با تابع چگالی احتمال نزولی به دست آورد. یکی از نتایج در زیر ارائه شده است.

قضیه‌ی ۱۰ فرض کنید  $\{N(t), t \geq 0\}$  یک فرایند پواسون ناهمگن با تابع نرخ نزولی باشد و همچنین فرض کنید  $R_1, R_2, \dots$  زمان‌های رخداد پیاپی باشند. در این صورت،

$$R_n \underset{disp}{\leq} R_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, n$$

### ۳ ترتیب تصادفی سیستم‌های موازی با مؤلفه‌های ناهمگن

توزیع نمایی نقش بسیار مهمی را در آمار بازی می‌کند. این توزیع به دلیل داشتن خاصیت بی‌حافظگی (non-aging) خواص جالبی دارد و اغلب کران‌های بسیار آسانی را برای احتمال‌های بقا و دیگر مشخصات مورد توجه سیستم‌های با مؤلفه‌های غیر نمایی به وجود می‌آورد. پلدگر و پروشان (۱۹۷۱) مسئله‌ی مقایسه‌ی تصادفی آماره‌های مرتب از متغیرهای تصادفی نمایی مستقل غیر هم‌توزیع را آماره‌های متناظر با متغیرهای نمایی مستقل و هم‌توزیع مورد مطالعه قرار دادند. این موضوع توسط پژوهشگران بسیاری از جمله پروشان و ستورامان (۱۹۷۶)، بولاند، النویهی و پروشان (۱۹۹۴)، دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷)، بولاند، شیکد و شانتی‌کومار (۱۹۹۸)، بن و پالتانه (۱۹۹۹) و خالدی و کوچار (۲۰۰۰a) و (۲۰۰۰b) در میان دیگران مورد توجه و پیگیری قرار گرفت. در این بخش سیستم‌هایی موازی را که از مؤلفه‌های غیر هم‌توزیع تشکیل شده‌اند از دیدگاه ترتیب پراکندگی و ترتیب نرخ خطر مورد مقایسه قرار می‌دهیم. ابتدا به حالتی که مؤلفه‌ها دارای توزیع‌های نمایی هستند می‌پردازیم و سپس نتایج را برای خانواده‌ی نرخ خطر متناسب گسترش می‌دهیم. پلدگر و ستورامان (۱۹۷۱) نتیجه‌ی زیر را ثابت کردند.

**قضیه‌ی ۱۱** فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که  $X_i$  دارای نرخ خطر  $\lambda_i$  برای هر  $i = 1, \dots, n$  است. فرض کنید  $X_1^*, \dots, X_n^*$  مجموعه‌ی دیگری از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشد که  $X_i^*$  دارای نرخ خطر  $\lambda_i^*$  برای هر  $i = 1, \dots, n$  است. آن‌گاه  $\lambda \geq \lambda^*$  برای هر  $i = 2, \dots, n$  نتیجه می‌دهد که

$$(17) \quad X_{1:n} \stackrel{st}{=} X_{1:n}^* \quad \text{و} \quad X_{i:n} \geq_{st} X_{i:n}^*.$$

پروشان و ستورامان (۱۹۷۶) این نتیجه را به ترتیب تصادفی چندمتغیره میان دو بردار از آماره‌های مرتب تعمیم دادند. آنان تحت شرایط قضیه‌ی بالا ثابت کردند که

$$(X_{1:n}, \dots, X_{n:n}) \stackrel{st}{\succ} (X_{1:n}^*, \dots, X_{n:n}^*).$$

برای حالت خاص  $n = 2$  و  $i = 2$ ، بولاند، النویهی و پروشان (۱۹۹۴) به طور جزئی نتیجه‌ی بالا از پلدگر و پروشان (۱۹۷۱) را از ترتیب تصادفی به ترتیب نرخ خطر تعمیم دادند. نتیجه‌ی آن‌ها در زیر آمده است.

**قضیه‌ی ۱۲** فرض کنید  $r_{\lambda_1, \lambda_2}(t)$  نرخ خطر یک سیستم موازی از دو مؤلفه باشد که طول عمر آن‌ها متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ‌های خطر  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  هستند. در این صورت،  $r_{\lambda_1, \lambda_2}(t)$  یک تابع

مقرر شور در  $(\lambda_1, \lambda_2)$  است. بنا بر این  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \stackrel{m}{\succ} (\lambda_1, \lambda_2)$  نتیجه می‌دهد:

$$X_{r:2} \geq_{hr} X_{r:2}^*.$$

بولاند، النویهی و پروشان (۱۹۹۴) با یک مثال نقض نشان دادند که قضیه‌ی ۱۱ را نمی‌توان به  $n$  دلخواه تعمیم داد. دکسترا، کوچار و روو (۱۹۹۷) ثابت کردند که نرخ خطر وارون  $X_{n:n}$ ، طول عمر سیستم موازی از  $n$  مؤلفه‌ی نمایی مستقل، در  $\lambda$  محدب شور است.

مسئله‌ی طبیعی دیگر مقایسه‌ی  $X_{n:n}$  با  $Y_{n:n}$  است که  $Y_1, \dots, Y_n$  نمونه‌ی تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر  $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n}$  می‌باشد. دکسترا، کوچار و روو (۱۹۹۷) نتیجه‌ی زیر را ثابت کردند.

**قضیه‌ی ۱۳** فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که  $X_i$  دارای نرخ خطر  $\lambda_i$  برای  $i = 1, \dots, n$  و  $Y_1, \dots, Y_n$  نمونه‌ی تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر  $\bar{\lambda}$  است. در این صورت،

$$(۱۸) \quad Y_{n:n} \leq_{disp} X_{n:n} \quad \text{و} \quad Y_{n:n} \leq_{hr} X_{n:n}.$$

این نتایج کران پایینی برای واریانس  $X_{n:n}$  و کران بالایی برای نرخ خطر  $X_{n:n}$  ارائه می‌دهند. جالب است که بدانیم آیا نتیجه‌ی بالا قابل تعمیم به آماره‌های مرتب دیگر می‌باشد؟ گرچه در حالت کلی پاسخ را نمی‌دانیم اما در قضیه‌ی بعدی می‌بینیم که نتیجه برای دومین آماره مرتب برقرار است.

**قضیه‌ی ۱۴** فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که  $X_i$  دارای نرخ خطر  $\lambda_i$  برای  $i = 1, \dots, n$  است و همچنین فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_n$  نیز نمونه‌ی تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر  $\bar{\lambda}$  باشد. در این صورت

$$Y_{r:n} \leq_{disp} X_{r:n}.$$

برهان. از قضیه‌ی ۳.۷ در کوچار و کروار (۱۹۹۶) نتیجه می‌شود که

$$(۱۹) \quad Y_{r:n} - Y_{1:n} \leq_{disp} X_{r:n} - X_{1:n} \quad \text{و} \quad X_{1:n} \stackrel{st}{\leq} Y_{1:n}.$$

چون توزیع  $(Y_{1:n}, X_{1:n})$  لگ کاو است، با پیروی از خاصیت ۴،

$$(۲۰) \quad Y_{r:n} = (Y_{r:n} - Y_{1:n}) + Y_{1:n} \leq_{disp} (X_{r:n} - X_{1:n}) + X_{1:n} = X_{r:n}.$$

چون  $X_{2:n} - X_{1:n}$  مستقل از  $X_{1:n}$  و  $Y_{2:n} - Y_{1:n}$  مستقل از  $Y_{1:n}$  است، بنا براین،

$$Y_{2:n} \underset{disp}{\leq} X_{2:n}.$$

در قضیه‌ی زیر خالدی و کوچار (۲۰۰۰b) با جایگذاری  $\tilde{\lambda} = \left( \prod_{i=1}^n \lambda \right)^{\frac{1}{n}}$  به جای  $\bar{\lambda}$ ، نشان دادند که نتایج قضیه‌ی ۱۳ همچنان برقرار است.

قضیه‌ی ۱۵ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند که  $X_i$  دارای نرخ خطر  $\lambda_i$  برای  $i = 1, \dots, n$  است. همچنین فرض کنید  $Z_1, \dots, Z_n$  نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر  $\tilde{\lambda} = \left( \prod_{i=1}^n \lambda \right)^{\frac{1}{n}}$  باشد. در این صورت

$$Z_{n:n} \underset{disp}{\leq} X_{n:n} \quad \text{و} \quad Z_{n:n} \underset{hr}{\leq} X_{n:n}.$$

نتیجه‌ی ۴ تحت شرایط قضیه‌ی ۱۵،

(آ) برای  $r_{X_{n:n}}$  نرخ خطر  $X_{n:n}$  داریم:

$$r_{X_{n:n}}(x; \lambda) \leq \frac{n\tilde{\lambda} \left( 1 - \exp\{-\tilde{\lambda}x\} \right)^{n-1} \exp(-\tilde{\lambda}x)}{1 - (1 - \exp\{-\tilde{\lambda}x\})^n},$$

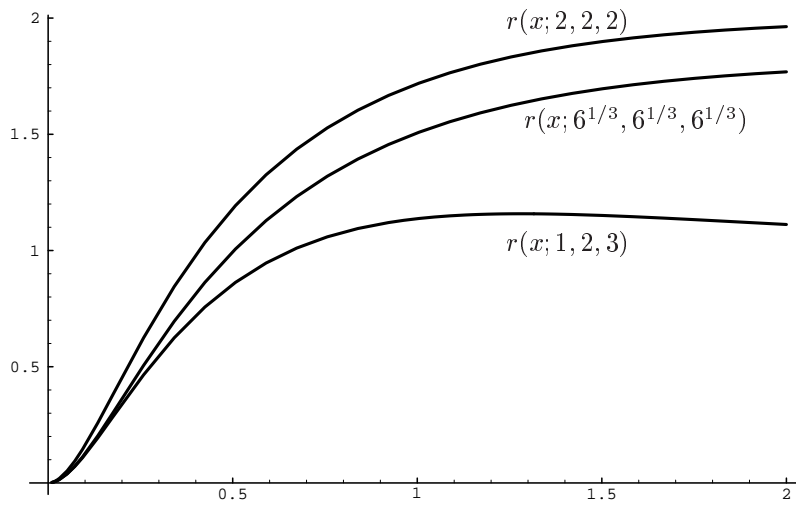
(ب)

$$\text{var}(X_{n:n}; \lambda) \geq \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i+1)^2}.$$

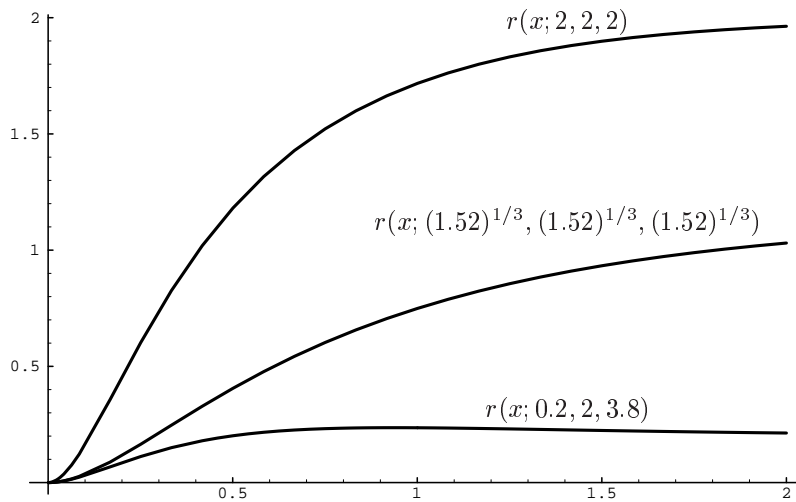
چون نرخ خطر  $Y_{n:n}$  تابعی غیر نزولی از  $\tilde{\lambda}$  است و این که میانگین هندسی  $\lambda_i$ ها از میانگین حسابی آنها کوچکتر است، کران‌های جدید حاصل از نتیجه‌ی ۴ بهتر از آن‌هایی است که توسط دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) به دست آمده‌اند.

در شکل‌های ۱ و ۲، نرخ‌های خطر سیستم‌های موازی سه مؤلفه‌ای نمایی را به همراه کران‌های بالای داده شده توسط دکسترا، کوچار و روهو (۱۹۹۷) و همچنین توسط نتیجه‌ی ۴ را رسم کرده‌ایم. بردار پارامترها در شکل ۱،  $\lambda_1 = (1, 2, 3)$  و در شکل ۲،  $\lambda_2 = (0.2, 2, 3/8)$  است. همچنین توجه کنید که  $\lambda_2 \stackrel{m}{\succ} \lambda_1$ .



شکل ۱. نمودار نرخ خطر  $X_{2:2}$ 

از شکل‌ها واضح است که با پراکنده‌تر شدن  $\lambda_i$ ها از نظر بیشاندن، کران‌ها نسبتاً بهتر می‌شوند. این پدیده به دلیل مقعر شور بودن میانگین هندسی است، و از طرفی میانگین حسابی ثابت شور (Schur-constant) است و نرخ خطر یک سیستم موازی متشکل از مؤلفه‌های نمایی مستقل و هم‌توزیع با نرخ مشترک  $\lambda$ ، در  $\lambda$  صعودی است.

شکل ۲. نمودار نرخ خطر  $X_{2:2}$

### ۳/۱ مدل نرخ خطر متناسب (PHR)

فرض کنید  $\bar{F}$  تابع بقای یک متغیر تصادفی نامنفی  $X$  با نرخ خطر  $h(\cdot)$  باشد. متغیرهای تصادفی مستقل  $X_1, \dots, X_n$  از مدل نرخ خطر متناسب پیروی می‌کنند اگر  $X_i$  برای  $i = 1, \dots, n$  دارای نرخ خطر  $\lambda_i h(\cdot)$  باشد. نتیجه‌ی قضیه‌ی ۱۵ قابل تعمیم به مدل PHR است که در زیر آورده شده است.

قضیه‌ی ۱۶ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند که  $X_i$  دارای نرخ خطر  $\lambda_i h(\cdot)$  برای  $i = 1, \dots, n$  است، به طوری که  $h(\cdot)$  نرخ خطر متغیر تصادفی نامنفی باشد. همچنین فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از یک توزیع با نرخ خطر مشترک  $\tilde{\lambda} h(\cdot)$  باشد، به طوری که 
$$\tilde{\lambda} = \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}}$$
 در این صورت،

$$\text{آ) } X_{n:n} \underset{hr}{\geq} Y_{n:n} \text{ و}$$

$$\text{ب) اگر } DFR, F \text{ آن‌گاه } X_{n:n} \underset{disp}{\geq} Y_{n:n}.$$

برهان.

آ) فرض کنید  $H(x) = -\log \bar{F}(x)$  نشان‌دهنده‌ی نرخ خطر تجمعی  $F$  باشد و برای هر  $i$ ،  $W_i = H(Y_i)$  و  $Z_i = H(X_i)$ ،  $i = 1, \dots, n$  چون  $X_i$ ها از مدل PHR پیروی می‌کنند، به روشنی  $Z_i$ ها نمایی با نرخ خطر  $\lambda_i$  و  $W_i$ ها نیز نمایی با نرخ خطر  $\tilde{\lambda}$  برای هر  $i$ ،  $i = 1, \dots, n$  هستند. از قضیه‌ی ۱۵ داریم که  $Z_{n:n} \underset{hr}{\geq} W_{n:n}$ . با توجه به اینکه  $H^{-1}$  معکوس راست  $H$ ، غیر نزولی است، در این صورت  $H^{-1}(Z_{n:n}) \underset{hr}{\geq} H^{-1}(W_{n:n})$  و قسمت آ) ثابت می‌شود.

ب) از قضیه‌ی ۱۵ به دست می‌آید که  $Z_{n:n} \underset{disp}{\geq} W_{n:n}$  و همچنین  $Z_{n:n} \underset{st}{\geq} W_{n:n}$ . تابع  $H^{-1}(x)$  غیر نزولی و محدب است، چون  $F$  غیر نزولی و DFR است. با استفاده از این‌ها، از خاصیت ۶ نتیجه می‌شود که  $H^{-1}(Z_{n:n}) \underset{disp}{\geq} H^{-1}(W_{n:n})$  که معادل با  $X_{n:n} \underset{disp}{\geq} Y_{n:n}$  است.

## ۴ ترتیب پراکندگی میان فاصله‌ها

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ی تصادفی از توزیع پیوسته با تابع توزیع احتمال  $F$  باشد و فرض کنید برای هر  $i, n, i = 1, \dots, n$ ،  $D_{i:n} = (n - i + 1)(X_{i:n} - X_{i-1:n})$ ،  $i$  امین فاصله‌ی نرمال شده باشد که در آن  $X_{0:n} \equiv 0$ . متغیرهای تصادفی  $D_{1:n}, \dots, D_{n:n}$  مستقل و هم‌توزیع‌اند اگر و فقط اگر  $F$  نمایی باشد. بارلو و پروشان (۱۹۶۶) ثابت کردند که اگر  $DFR$ ،  $IFR$  باشد، آنگاه فاصله‌های نرمال شده به‌طور تصادفی صعودی (نزولی) هستند. کوچار و کرمانی (۱۹۹۵) این نتیجه را برای حالتی که  $DFR$ ،  $F$  است به ترتیب نرخ خطر تعمیم دادند. این نتیجه در زیر آمده است.

قضیه‌ی ۱۷ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیعی  $DFR$  باشد. در این صورت،

$$(A) \quad \text{برای } i, i = 1, \dots, n-1$$

$$D_{i:n} \leq_{hr} D_{i+1:n}.$$

(ب) برای  $i$  ثابت و  $n \geq i$

$$D_{i:n+1} \leq_{hr} D_{i:n}.$$

بارلو و پروشان (۱۹۶۶) نشان دادند که فاصله‌های متناظر با متغیرهای تصادفی  $DFR$ ، مستقل و هم‌توزیع دارای توزیع  $DFR$  هستند. اثبات قضیه‌ی بعد متکی به رابطه‌ی میان ترتیب نرخ خطر و ترتیب پراکندگی و قضیه‌ی ۱۷ است.

قضیه‌ی ۱۸ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیعی  $DFR$  باشد. در این صورت،

$$(A) \quad \text{برای هر } i, i = 1, \dots, n-1$$

$$D_{i:n} \leq_{disp} D_{i+1:n}.$$

(ب) برای  $i$  ثابت و  $n \geq i$

$$D_{i:n+1} \leq_{disp} D_{i:n}.$$

کوچار (۱۹۹۶c) نتایج مشابهی برای فاصله‌های زمانی رخدادهای متوالی (inter-occurrence) یک فرایند پواسون ناهمگن به‌دست آورد. خالدی و کوچار (۱۹۹۹) نتیجه‌ی کلی زیر را که تعمیمی از قضایای ۱۷ و ۱۸ از مقایسه‌های مسائل دونمونه‌ای است اثبات نمودند.

قضیه‌ی ۱۹ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$ ، نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی نامنفی  $X$  با توزیع پیوسته‌ی  $F$  و  $U_{i:n} = (n - i + 1)(X_{i:n} - X_{i-1:n})$ ،  $i$ امین فاصله‌ی نرمال متناظر با  $X_i$ ها باشد. همچنین فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_m$ ، نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی نامنفی  $Y$  با توزیع پیوسته‌ی  $G$  و  $V_{j:m} = (m - j + 1)(Y_{j:m} - Y_{j-1:m})$ ،  $j$ امین فاصله‌ی نرمال متناظر با  $Y_j$ ها باشد. در این جا  $X_{\circ:n} = Y_{\circ:m} \equiv \circ$  اگر  $Y \leq_{st} X$  و یا  $G, DFR$  باشد، آن‌گاه برای  $i \leq j$  و  $n - i \geq m - j$

$$U_{i:n} \leq_{disp} V_{j:m}.$$

کوچار و کروار (۱۹۹۶) مسئله‌ی مقایسه‌ی فاصله‌های متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای مختلف ممکن را مورد مطالعه قرار دادند.

قضیه‌ی ۲۰ فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باشند به طوری که برای هر  $i, i = 1, \dots, n$  دارای توزیع نمایی با نرخ خطر  $\lambda_i$  و  $D_{i:n}$ ،  $i$ امین فاصله‌ی نرمال شده برای هر  $i, i = 1, \dots, n$  باشد. همچنین فرض کنید  $X_1^*, \dots, X_n^*$  نیز نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک  $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n}$  و  $D_{i:n}^*$  نیز  $i$ امین فاصله‌ی نرمال شده برای  $i = 1, \dots, n$  باشد. آن‌گاه

$$(A) \quad \text{برای } i = 2, \dots, n$$

$$D_{i:n}^* \leq_{disp} D_{i:n},$$

$$(B) \quad (\lambda_1, \lambda_2) \succ (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \Rightarrow D_{2:2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \leq_{disp} D_{2:2}(\lambda_1, \lambda_2).$$

کوچار و کروار (۱۹۹۶) حدس زدند که در حالت مستقل بودن متغیرهای نمایی با پارامترهای مختلف، برای  $i = 1, \dots, n - 1$  رابطه‌ی  $D_{i:n} \leq_{hr} D_{i+1:n}$  برقرار است. خالدی و کوچار (۲۰۰۱) آن را برای حالت خاصی که همه به جز یکی از پارامترها برابر باشند، ثابت کردند. بدین ترتیب آن‌ها در حالتی که  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda$  و  $\lambda_n = \lambda^*$  حدس آن‌ها را ثابت کردند. به این حالت مدل نمایی تک دور افتاده با پارامتر  $(\lambda, \lambda^*)$  می‌گوییم.

قضیه‌ی ۲۱ (خالدی و کوچار (۲۰۰۱)) فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$ ، از مدل نمایی تک دور افتاده با پارامترهای  $(\lambda_1, \lambda_1^*)$  و  $Y_1, \dots, Y_n$ ، از مدلی نمایی تک دور افتاده با پارامترهای  $(\lambda_2, \lambda_2^*)$  باشد. اگر

$$(21) \quad \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_2 < \lambda_1 \quad \text{و} \quad \lambda_1^* + (n - 1)\lambda_1 = \lambda_2^* + (n - 1)\lambda_2$$

$$\text{آن‌گاه برای } i = 1, \dots, n$$

$$D_{i:n}^{(1)} \geq_{hr} D_{i:n}^{(2)} \quad \text{و} \quad D_{i:n}^{(1)} \geq_{disp} D_{i:n}^{(2)},$$

به طوری که  $D_{i:n}^{(1)}$  و  $D_{i:n}^{(2)}$ ، به ترتیب فاصله‌های متناظر با مدل‌های نمایی تک دور افتاده با پارامترهای  $(\lambda_1, \lambda_1^*)$  و  $(\lambda_2, \lambda_2^*)$  هستند.

نکته. توجه کنید که از (۲۱) نتیجه می‌شود که

$$(\lambda_1^*, \lambda_1, \dots, \lambda_1) \stackrel{m}{\succ} (\lambda_2^*, \lambda_2, \dots, \lambda_2).$$

### قدردانی

نویسنده از داوران و سردبیرگرمی مجله برای توصیه‌های مفید آن‌ها تشکر می‌نماید. این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه شهید بهشتی-۱۳۸۷/۶۰ انجام شده است.

### مرجع‌ها

- Ahmad, A.N.; Alizaid, A.; Bartoszewicz, J.; Kochar, S.C. (1986). Dispersive and superraditive ordering. *Adv. in Appl. Probab.* **18**, 1019-1022.
- Bagai, I.; Kochar, S.C. (1986). On tail ordering and comparison of failure rates. *Commun. Statist. Theory Methods* **15**, 1377-1388.
- Barlow, R.E.; Proschan, F. (1966). Inequalities for linear combinations of order statistics from restricted families. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1574-1592.
- Barlow, R.E.; Proschan, F. (1981). Statistical theory of reliability and life testing. To Begin With: Silver Spring, Maryland.
- Bartoszewicz, J. (1985a). Moment Inequalities for order statistics from ordered families of distributions. *Metrika* **32**, 383-389.
- Bartoszewicz, J. (1985b). Dispersive ordering and monotone failure rate distributions. *Adv. Appl. Probab.* **17**, 472-474.
- Bartoszewicz, J. (1986). Dispersive ordering and the total time on test transformation. *Statist. Probab. Lett.* **6**, 13-16.
- Bartoszewicz, J. (1987). A note on dispersive ordering defined by hazard functions. *Statist. Probab. Lett.* **6**, 13-17.
- Bickel, P.J.; Lehmann, E.L. (1979). Descriptive statistics for nonparametric models. IV. Spread. In Contributions to Statistics. Jaroslav Hajek Memorial Volume, edited by Jena Jureckova, 33-40.
- Boland, P.J.; El-Newihi, E.; Prochan, F. (1994). Schur properties of convolutions of expo-

nential and geometric random variables. *J. Multivariate Anal.* **48**, 157-167.

Boland, P.J.; Shaked, M.; Shanthikumar, J.G. (1998). Stochastic ordering of order statistics. In N. Balakrishnan and C.R. Rao, eds, Handbook of statistics 16 - Order statistics: Applications. Elsevier, New York, 89-103.

Bon, J.L.; Paltanea, E. (1999). Ordering properties of convolutions of exponential random variables. *Lifetime Data Anal.* **5**, 185-192.

David, H.A.; Groenveld, R.A. (1982). Measures of local variation in a distribution: Expected lengths of spacings and variances of order statistics. *Biometrika* **69**, 227-232.

Deshpande, J.V.; Kochar, S.C. (1982). Some competitors of the Wilcoxon-Mann-Whitney test for the location alternative. *J. Indian Statist. Assoc.* **20**, 9-18.

Deshpande, J.V.; Kochar, S.C. (1983). Dispersive ordering is the same as tail ordering. *Adv. in Appl. Probab.* **15**, 686-687.

Deshpande, J.V.; Mehta, G.P. (1982). Inequality for the infimum of PCS for heavy tailed distributions. *J. Indian Statist. Assoc.* **19**, 19-25.

Dharmadhikari, S.; Joeg-dev, K. (1988). Unimodality, Convexity and Applications. Academic press, INC. New York, London.

Doksum, J. (1969). Star-shaped transformations and the power of rank test. *Ann. Math. Statist.* **40**, 1167-1176.

Dykstra, R.; Kochar, S.C.; Rojo, J. (1997). Stochastic comparisons of parallel systems of heterogeneous exponential components. *J. Statist. Plann. Inference* **65**, 203-211.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (1999). Stochastic orderings between distributions and their sample spacings-II. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 161-166.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (2000a). On dispersive ordering between order statistics in one-sample and two-sample problems. *Statist. Probab. Lett.* **46**, 257-261.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (2000b). Some new results on stochastic comparisons of parallel systems. *J. Appl. Probab.* **37**, 1123-1128.

Khaledi, B.; Kochar, S.C. (2001). Stochastic properties of spacings in a single-outlier exponential model. *Probab. in Engrg. Inform. Sci.* **15**, 401-408.

Kochar, S.C. (1996a). Dispersive ordering of order statistics. *Statist. Probab. Lett.* **27**, 271-274.

Kochar, S.C. (1996b). A note of dispersive ordering of record values. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* **46**, 63-67.

Kochar, S.C. (1996c). Some results on interarrival times of nonhomogeneous Poisson pro-

cesses. *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **10**, 75-85.

Kochar, S.C. (1999). Stochastic orderings between distributions and their sample spacings. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 161-166.

Kochar, S.C.; Kirmani, S.N.U.A. (1995). Some new results on normalized spacings from restricted families of distributions. *J. Statist. Plann. Inference* **46**, 47-57.

Kochar, S.C.; Korwar, R. (1996). Stochastic orders for spacings of heterogeneous exponential random variables. *J. Multivariate Anal.* **57**, 69-83.

Kochar, S.C.; Rojo, J. (1996). Some new results on stochastic comparisons of spacings from heterogeneous exponential distributions. *J. Multivariate Anal.* **59**, 272-281.

Lehmann, E.L. (1955). Ordered families of distributions. *Ann. Math. Statist.* **26**, 399-419.

Lehmann, E.L.; Rojo, J. (1992). Invariant directional orderings. *Ann. Statist.* **20**, 2100-2110.

Lewis, T.; Thompson, J.W. (1981). Dispersive distribution and the connection between dispersivity and strong unimodality. *J. Appl. Probab.* **18**, 76-90.

Marshall, A.W.; Olkin, I. (1979). Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Academic Press, New York.

Pledger, P. And Proschan, F. (1971). Comparisons of order statistics and of spacings from heterogeneous distributions. In *Optimizing Methods in statistics*. Academic Press, New York, 89-113. ed. Rustagi, J.S.

Proschan, F.; Sethuraman, J. (1979). Stochastic comparisons of order statistics from heterogeneous populations, with applications in reliability. *J. Multivariate Anal.* **6**, 608-616.

Rojo, J.; He, G.Z. (1991). New Properties and characterizations of dispersive ordering. *Statist. Probab. Lett.* **11**, 365-372.

Sathe, Y. (1984). Dispersive ordering of distributions. *Adv. in Appl. Probab.* **16**, 692.

Saunders, I.W.; Moran, P.A.P. (1978). On quantiles of the gamma and F distributions. *J. Appl. Probb.* **15**, 426-432.

Shaked, M. (1982). Dispersive ordering of distributions. *J. Appl. Probb.* **19**, 310-320.

Shaked, M.; Shanthikumar, J.G. (1994). Stochastic Orders and their Applications. Academic Press, San Diego, CA.

Yanagimoto, T.; Sibuya, M. (1976). Isotonic tests for spread and tail. *Ann. Inst. Statist. Math.* **28**, 329-342.

دریافت: ۲۷ مهر ۱۳۸۴  
آخرین اصلاح: ۶ اردیبهشت ۱۳۸۵

گروه آمار، دانشکده‌ی علوم،  
دانشگاه رازی،  
کرمانشاه،  
ایران.

بهاءالدین خالدی  
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،  
دانشگاه شهید بهشتی،  
تهران، ایران.  
پیام‌نگار: *bkhaleedi@hotmail.com*