



# ساختار ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی و نقش آن در تقریب واریانس یک آماره

محمد خراشادیزاده و غلامرضا محتشمی برزادران\*

دانشگاه فردوسی مشهد و پژوهشکده‌ی آمار

چکیده. در بسیاری از مواقع، بهترین برآوردگر تابعی از پارامتر مجهول وجود دارد ولی به دلیل پیچیدگی آن نمی‌توان واریانس آن را در قالب یک رابطه‌ی صریح بیان کرد. در این تحقیق با معرفی کران پایین باتاچاریا که مرتبط با ماتریس باتاچاریا است، تقریبی از واریانس آن برآوردگر را بیان می‌کنیم که با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا این تقریب، دقیق‌تر خواهد بود. برای خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با واریانس درجه‌ی ۲ از  $\theta$  و همچنین برخی از توزیع‌های خانواده‌ی نمایی طبیعی با واریانس درجه‌ی ۳ از  $\theta$  با تکیه بر توزیع‌های گاوسی وارون، آبل و تاکاس با شبیه‌سازی و محاسبات عددی نشان داده شده است که کران باتاچاریا به‌عنوان تقریب واریانس آماره، بهتر از کران پایین کرامر-رائو می‌باشد.

واژگان کلیدی. خانواده‌ی توزیع‌های طبیعی؛ ماتریس باتاچاریا؛ کران پایین باتاچاریا؛ کران پایین کرامر-رائو؛ اطلاع فیشر.

## ۱ مقدمه

یکی از مسائل مهم در نظریه‌ی برآورد، کران پایین برای واریانس برآوردگر می‌باشد؛ زیرا این موضوع، اطلاعاتی در مورد دقت و صحت برآوردگر به ما می‌دهد. از استنباط آماری می‌دانیم که نابرابری کرامر-رائو یک کران پایین برای واریانس برآوردگرهای نارایب ارائه می‌دهد؛ اما این نابرابری فقط بیان می‌کند که تحت شرایط

\* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

خاصی، واریانس هر برآوردگر نمی‌تواند از یک کمیت مشخص کم‌تر باشد و این‌که این واریانس چه قدر بیش‌تر از این کمیت است، مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

باتاچاریا (۱۹۴۶، ۱۹۴۷) یک صورت تعمیم‌یافته از نابرابری کران-رائو به دست آورد که مرتبط با ماتریس باتاچاریا است. ماتریس باتاچاریا همان ماتریس کوواریانس بردار تصادفی

$$\left( \frac{f^{(1)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \frac{f^{(2)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \dots, \frac{f^{(k)}(X|\theta)}{f(X|\theta)} \right)$$

است که در آن  $f^{(k)}(X|\theta)$  مشتق  $k$ ام تابع چگالی احتمال  $f(X|\theta)$  نسبت به  $\theta$  (پارامتر توزیع)، و  $k$  مرتبه‌ی ماتریس می‌باشد و برای مقدار  $k = 1$  این ماتریس تبدیل به اطلاع فیشر می‌شود. بر اساس این ماتریس، نابرابری باتاچاریا بیان می‌شود.

علاوه بر این، در این زمینه، نویسندگان زیادی از جمله شان‌باگ (۱۹۷۲، ۱۹۷۹)، بلایت و رائو (۱۹۷۴) و محتشمی برزادران (۲۰۰۱، ۲۰۰۶) مقاله‌های قابل توجهی ارائه کرده‌اند.

## ۱/۱ نابرابری باتاچاریا

تعریف ۱ اگر  $T(X)$  برآوردگر ناریب از تابع  $\tau(\theta)$  باشد داریم:

$$\text{var}_{\theta}(T(X)) \geq \xi'_{\theta} J^{-1} \xi_{\theta},$$

که در آن:

(آ) « ' » نشان‌دهنده‌ی ترانپوز می‌باشد و  $\xi'_{\theta} = (\tau^{(1)}(\theta), \tau^{(2)}(\theta), \dots, \tau^{(k)}(\theta))'$ ؛

(ب)  $\tau^{(j)}(\theta) = \frac{\partial^j E_{\theta}(T(X))}{\partial \theta^j}$  که در آن  $j = 1, 2, \dots, k$ ؛

(پ)  $J^{-1}$  وارون ماتریس باتاچاریا می‌باشد که در آن:

$$J_{rs} = \text{cov} \left( \frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \frac{f^{(s)}(X|\theta)}{f(X|\theta)} \right), \quad r, s = 1, 2, \dots, k$$

$$E_{\theta} \left( \frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)} \right) = 0$$

لذا بر اساس نابرابری باتاچاریا برای مقادیر مختلف  $k$  (مرتبه‌ی ماتریس) می‌توان کران‌های مختلفی را برای واریانس آماره پیدا کرد. به ازای مقدار  $k = 1$  این نابرابری به کران کران-رائو تبدیل می‌شود و هرچه مرتبه‌ی ماتریس ( $k$ ) افزایش یابد و تابع  $\tau(\theta)$  نیز مشتق‌پذیر از آن مرتبه باشد، کران باتاچاریا به واریانس آماره نزدیک‌تر می‌شود. این مطلب را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

فرض کنیم  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)'$  برداری تصادفی با ماتریس کواریانس معین مثبت  $\Sigma$  باشد.  $X$  و  $\Sigma$  را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma'_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix}$$

که در آن  $Y = (X_2, X_3, \dots, X_m)'$ . در این صورت  $\text{var}(X_1) = \sigma_{11}$  و  $\text{cov}(Y) = \Sigma_{22}$  و  $\sigma_{12}$  بردار  $1 \times (m-1)$  می‌باشد که همان کواریانس بین  $X_1$  و  $Y$  است. بیشترین همبستگی بین  $X_1$  و ترکیب خطی  $b'Y$  زمانی حاصل می‌شود که  $b = \sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1}$  است (اندرسون، ۱۹۵۸) که اگر آن را با  $\rho_{1.2 \dots m}$  نشان دهیم داریم:

$$\rho_{1.2 \dots m} = \left( \frac{\sigma'_{12} \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{12}}{\sigma_{11}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

و چون  $\rho_{1.2 \dots m} \leq 1$  لذا:

$$\sigma_{11} \geq \sigma'_{12} \sum_{22}^{-1} \sigma_{12}.$$

حال اگر  $m$  را به  $m+1$  تبدیل کنیم و بردار  $X$  را به صورت  $X = (X_1, Y^*)'$  افراز کنیم که در آن  $Y^* = (X_2, \dots, X_{m+1})'$  می‌بینیم که کران پایین  $\sigma_{11}$  بزرگ‌تر می‌شود، که مؤید آن است که با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا کران باتاچاریا به واریانس آماره نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

## ۲ خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس مربع

### (NEF-QVF) و قطری بودن ماتریس باتاچاریا

با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا اگرچه به عنوان تقریب بهتری از واریانس آماره عمل می‌کند، محاسبه‌ی وارون آن پیچیده‌تر می‌شود. شاید بتوان گفت که در دنیای امروز با رایانه این مشکل حل شده است، ولی در حالت‌های خاص، کران باتاچاریا که به وارون ماتریس باتاچاریا بستگی دارد قابل توجه است و نتایج جالبی را نشان می‌دهد که حتی بدون رایانه هم قابل انجام است.

شان‌باگ (۱۹۷۲، ۱۹۷۹) نشان داد که ماتریس باتاچاریا از هر مرتبه‌ای در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی دو، قطری است، که این موضوع مسئله‌ی محاسبه‌ی وارون ماتریس باتاچاریا را در

این خانواده‌ی توزیع‌ها حل می‌کند. او همچنین نشان داد که فقط و فقط در ۶ توزیع احتمال نرمال، پواسون، دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی، گاما و فوق هندسی آمیخته که دارای تابع واریانس درجه‌ی دو می‌باشند، ماتریس باتاچاریا قطری است. به عبارت دیگر اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی ناتباهیده‌ی  $X$  به صورت زیر باشد

$$(۱) \quad f(x|\theta) = \frac{\exp(xg(\theta))}{\beta(g(\theta))} \psi(x);$$

که در آن  $\theta \in \Theta$ ، و  $\Theta$  یک بازه در اعداد حقیقی و تابع  $g$  بسته به مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا مشتق‌پذیر نسبت به آن مرتبه است، آن‌گاه ماتریس باتاچاریا از هر مرتبه‌ای قطری است اگر و فقط اگر

$$E_{\theta}(X) = c_{11} + c_{21}\theta,$$

$$E_{\theta}(X^2) = c_{12} + c_{22}\theta + c_{32}\theta^2,$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\text{var}_{\theta}(X) = c_{12} + c_{22}\theta + c_{32}\theta^2$$

و

$$g'(\theta) = \frac{c_{21}}{c_{12} + c_{22}\theta + c_{32}\theta^2},$$

که در آن‌ها  $c_{ij}$ ها اعداد ثابتی (مستقل از  $\theta$ ) هستند. شان‌باگ با قرار دادن مقادیر مختلف برای این ثابت‌ها مشخصه‌هایی برای شش توزیع مذکور پیدا کرد. با در نظر گرفتن ماتریس باتاچاریای  $3 \times 3$  می‌توان  $(r, s)$  امین درایه‌ی این ماتریس را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$J_{rs} = \text{cov} \left( \frac{f(r)}{f}, \frac{f(s)}{f} \right) = E \left( \frac{f(r)}{f}, \frac{f(s)}{f} \right);$$

$$\text{زیرا } E \left( \frac{f(k)}{f} \right) = 0 \text{ برای } k = 1, 2, 3.$$

با توجه به قضیه‌ی زیر (بلایت و راثو، ۱۹۷۴) می‌توانیم برای این خانواده‌ی توزیع‌ها واریانس هر برآوردگر ناریب را به راحتی تقریب بزنیم.

قضیه‌ی ۱ فرض کنید  $T = T(X)$  یک MVUE برای پارامتر برآوردپذیر  $\tau(\theta)$  با واریانس متناهی باشد. آن‌گاه تحت شرایط (ا) تا (ت) برای هر  $\theta \in \Theta$  داریم:

$$\text{var}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\tau^i(\theta)}{J_i} \right\}^2$$

که در آن  $J_i^{\tau}$  درایه‌ی  $i$ ام روی قطر ماتریس باتاچاریا می‌باشد.

## شرایط:

- (آ) فضای پارامتر  $\Theta$  یک بازه در اعداد حقیقی باشد،  
 (ب)  $X$  متعلق به خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی دو باشد،  
 (پ) مشتق تابع چگالی نسبت به  $\theta$  تا هر مرتبه‌ای وجود داشته باشد،  
 (ت) بسط تیلور تابع چگالی و تابع  $\tau(\theta)$  در هر  $\theta \in \Theta$  به‌ازای هر  $t$  وجود داشته باشد.

با توجه به قضیه‌ی ۱ می‌توان واریانس هر برآوردگری را در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی دو به‌راحتی تقریب زد. در جدول ۱ شکل بسته‌ای از مقادیر روی قطر ماتریس باتاچاریا از هر مرتبه‌ای برای شش توزیع مذکور ارائه شده است.

در ادامه با ارائه‌ی دو مثال و شبیه‌سازی و محاسبات عددی برای دو توزیع دوجمله‌ای و نمایی نشان می‌دهیم که کران باتاچاریا با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار واقعی واریانس برآوردگر مورد نظر میل می‌کند.

مثال ۱ (توزیع دوجمله‌ای منفی). فرض کنید می‌خواهیم پارامتر  $p$  در توزیع دوجمله‌ای منفی با تابع چگالی احتمال زیر را برآورد کنیم:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} \quad (n = r, r+1, \dots), \quad r \geq 1$$

که در آن  $r$  معلوم می‌باشد. به‌راحتی می‌توان نشان داد که بهترین برآوردگر ناریب برای  $p$  به‌صورت

$$\hat{p} = \begin{cases} \frac{r-1}{n-1}, & n > 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

می‌باشد، اما هیچ عبارت ساده‌ای برای واریانس این برآوردگر وجود ندارد. در این حالت اگر قرار دهیم  $\theta = p^{-1}$ ، آنگاه  $\tau(\theta) = \theta^{-1}$ . پس با استفاده از جدول ۱ و قضیه‌ی ۱ داریم:

$$\text{var}(\hat{p}) = p^2 \sum_{i=1}^{\infty} \binom{r+i-1}{i}^{-1} q^i.$$

جدول ۱. درایه‌های روی قطر ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با واریانس درجه‌ی ۲

نام توزیع	تابع چگالی احتمال $f(x \theta)$	درایه‌ی $r$ ام روی قطر ماتریس باتاچاریا
نرمال $N(\theta, \sigma^2)$ ; $\sigma^2$ معلوم	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{r!}{(\sigma^2)^r}$
پواسون $P(\theta)$	$\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$	$\frac{r!}{\theta^r}$
گاما $\Gamma(\alpha, \theta)$ ; $\alpha$ معلوم	$\frac{x^{\alpha-1}\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}$	$\frac{(\alpha+r-1)!r!}{(\alpha-1)!\theta^{r\alpha}}$
دوجمله‌ای $\text{Bin}(n, \theta)$ ; $n$ معلوم	$\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$	$\frac{\binom{n}{r}(r!)^r}{(\theta(1-\theta))^r}, r \leq n$
دوجمله‌ای منفی $\text{NB}(n, \theta)$ ; $n$ معلوم	$\binom{n-1}{x-1}\left(\frac{1}{\theta}\right)^x\left(1-\frac{1}{\theta}\right)^{n-x}$	$\frac{(n+r-1)!r!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(\theta(\theta-1))^r}$
فوق هندسی آمیخته	$(\cos \alpha)^\rho \frac{\Gamma(\rho-x)}{\Gamma(\rho)} e^{\alpha x}$ $\Gamma\left(\frac{\rho}{\tau} + \frac{ix}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{\tau} - \frac{ix}{\tau}\right);$ $x \in R, \alpha = \tan^{-1}(\theta)$	$\frac{\Gamma(\rho+r)r!}{\Gamma(\rho)} \cdot \frac{1}{\rho^\tau(1+\theta^\tau)^r}$

هالدان (۱۹۴۵) از رهیافتی دیگر، همین عبارت را به‌عنوان بهترین روش برای برآورد واریانس  $\hat{p}$  هنگامی که  $r$  بزرگ باشد معرفی کرده است. سری فوق برای مقادیر مختلف  $p$  و  $r$  خیلی سریع به مقدار مشخصی می‌گراید؛ مثلاً برای  $r = 10$  و  $p = 0.5$  داریم:

$$\text{var}(\hat{p}) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{220} + \frac{1}{1760} + \dots \right) \approx 0.138.$$

مثال ۲ (تابع قابلیت اعتماد). یکی از مسائل مهم که در قابلیت اعتماد وجود دارد مسئله‌ی برآورد کردن تابع قابلیت اعتماد از یک مجموعه داده‌ی مستقل می‌باشد. در توزیع نمایی با میانگین  $\theta$ ، نویسندگان زیادی نشان داده‌اند که بهترین برآوردگر ناریب برای  $\tau(\theta) = e^{-\frac{a}{\theta}}$  (تابع قابلیت اعتماد) به صورت زیر است:

$$\hat{\tau} = \left( 1 - \frac{a}{n\bar{x}} \right)^+$$

که در آن  $a^+ = \min(0, a)$

جدول ۲. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر تابع قابلیت اعتماد در توزیع نمایی (مقادیر در ۱۰۰۰ ضرب شده‌اند)

$\lambda$	$n = 4$				$n = 8$			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
۰٫۵	۲۲٫۹۹	۲۸٫۱۷	۲۹٫۵۱	۲۹٫۸۷	۱۱٫۵۰	۱۲٫۹۳	۱۳٫۱۶	۱۳٫۱۸
۱	۳۳٫۸۳	۳۷٫۲۲	۳۷٫۲۱	۳۷٫۲۱	۱۶٫۹۲	۱۷٫۸۶	۱۷٫۸۹	۱۷٫۸۹
۲	۱۸٫۳۲	۱۸٫۳۲	۱۸٫۷۲	۱۸٫۹۶	۹٫۱۶	۹٫۱۶	۹٫۲۳	۹٫۲۵
۴	۱٫۳۴	۱٫۸۸	۱٫۹۱	۱٫۹۳	۰٫۶۷	۰٫۸۲	۰٫۸۳	۰٫۸۳

  

$\lambda$	$n = 16$				$n = 32$			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
۰٫۵	۵٫۷۵	۶٫۱۳	۶٫۱۶	۶٫۱۷	۲٫۸۷۴	۲٫۹۷۲	۲٫۹۷۶	۲٫۹۷۶
۱	۸٫۴۶	۸٫۷۱	۸٫۷۱	۸٫۷۱	۴٫۲۲۹	۴٫۲۹۳	۴٫۲۹۴	۴٫۲۹۴
۲	۴٫۵۸	۴٫۵۸	۴٫۵۹	۴٫۵۹	۲٫۲۸۹	۲٫۲۸۹	۲٫۲۹۰	۲٫۲۹۰
۴	۰٫۳۴	۰٫۳۸	۰٫۳۸	۰٫۳۸	۰٫۱۶۷	۰٫۱۷۷	۰٫۱۷۸	۰٫۱۷۸

زاکس و ایون (۱۹۶۶) توانسته‌اند واریانس برآوردگر فوق را محاسبه کنند؛ اما فرمول آن بسیار پیچیده است که محاسبه‌ی آن حتی برای مقادیر کوچک  $n$  بسیار مشکل است؛ در حالی که با استفاده از کران‌های باتاچاریا به راحتی می‌توان واریانس برآوردگر فوق را تقریب زد. لذا با توجه به قضیه‌ی ۱ و جدول ۱ داریم:

$$\text{var}(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{2i}(n-1)!}{i!(n+i-1)!} \tau^{(i)}(\theta)^2.$$

در جدول ۲ چهار کران اول باتاچاریا را برای مقادیر مختلف  $n$  و  $\lambda = \frac{a}{\theta}$  محاسبه کرده‌ایم. دو نکته‌ی مهمی که از این مثال و جدول آن می‌توان دید این است که

- برای اکثر مقادیر مختلف پارامتر، کران‌های باتاچاریا حتی برای اندازه‌های کم نمونه به سرعت به مقدار واقعی واریانس آماره میل می‌کنند.
- کران کرامر-رائو،  $B_1$ ، حتی برای اندازه‌های بزرگ نمونه، یک مقدار ناکافی برای مقدار واقعی واریانس آماره می‌باشد. بنا بر این نیاز میریم به کران بهتری از کران کرامر-رائو داریم.

### ۳ ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه‌ی سه (NEF-CVF)

ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی سه به صورت قطری نیست. لذا برای بررسی دقیق‌ترین موضوع، این خانواده‌ی توزیع‌ها را در دو حالت

(آ) توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی سه از  $\theta$  است و  $E(X)$  هم تابعی خطی از  $\theta$  است،

(ب) توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی سه از  $E(X)$  است ولی  $E(X)$  تابع خطی از  $\theta$  نیست،

مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این جا قبل از بررسی این خانواده‌ی توزیع‌ها به بیان دو لم می‌پردازیم: لم ۱ (فند، ۱۹۵۹). در خانواده‌ی توزیع نمایی طبیعی به صورت (۱) می‌توان حاصل  $\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}$  را به صورت یک چندجمله‌ای از درجه‌ی  $r$  بر حسب  $x$  به شکل زیر نوشت:

$$\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)} = \sum_{l=0}^r d_{rl}(\theta)x^l$$

که در آن  $d_{rl}(\theta)$  ضریب  $x^l$  می‌باشد و فقط به  $\theta$  بستگی دارد.

لم ۲ (محتشمی برزادران، ۲۰۰۱). برای خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی  $k$  از میانگین‌اش است، هرگاه  $E(X)$  تابعی خطی از  $\theta$  باشد،  $E(X^r)$  چندجمله‌ای از  $\theta$  با درجه‌ی  $(r-1)(k-1)+1$  است.

#### ۳٫۱ توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی سه از $\theta$ است و $E(X)$ هم تابعی خطی از $\theta$ است

با فرض  $E_{\theta}(X) = c_{11} + c_{21}\theta$  می‌توان نشان داد که ماتریس باتاچاریای  $3 \times 3$  در رده‌ی توزیع‌های لوتا-ک-مورا (لوتا-ک و مورا، ۱۹۹۰) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & \circ & \circ \\ \circ & J_{22} & l(g'(\theta))^2 \\ \circ & l(g'(\theta))^2 & J_{33} \end{pmatrix}.$$



از جمله‌ی توزیع‌هایی که دارای این ویژگی‌اند توزیع گاوسی وارون می‌باشد که در آن  $E(X)$  تابعی خطی از  $\theta$ ، و  $E(X^2)$  چندجمله‌ای درجه‌ی سه از  $\theta$ ، و در نتیجه واریانس آن از درجه‌ی سه می‌باشد. با توجه به لم‌های ۱ و ۲ می‌توانیم درایه‌های ماتریس را با استفاده از این موضوع و محاسبه‌ی  $E(X^r)$  برای  $r$ ‌های مختلف محاسبه کنیم.

در این‌جا با فرض این‌که  $E(X)$  تابعی خطی از  $\theta$  و  $E(X^2)$  تابعی درجه‌ی سه از  $\theta$  است و این‌که برای هر  $r$  داریم  $E\left(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right) = 0$ ، درایه‌های ماتریس باتاچاریای  $5 \times 5$  را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} J_{12} = J_{21} &= E\left(\frac{f^{(2)}}{f} \sum_{l=0}^1 d_{\lambda l}(\theta) X^l\right) \\ &= \sum_{l=0}^1 d_{\lambda l}(\theta) E\left(\frac{f^{(2)}}{f} \cdot X^l\right) = d_{\lambda 1}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} E(X) = 0, \end{aligned}$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$J_{13} = J_{14} = J_{15} = J_{24} = J_{25} = 0.$$

ولی برای درایه‌های دیگر که غیر صفر می‌باشند داریم:

$$\begin{aligned} J_{22} &= E\left(\frac{f^{(2)}}{f} \sum_{l=0}^2 d_{\tau l}(\theta) X^l\right) = \sum_{l=0}^2 d_{\tau l}(\theta) E\left(\frac{f^{(2)}}{f} \cdot X^l\right) = d_{\tau 2}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} E(X^2) \neq 0 \\ J_{33} &= E\left(\frac{f^{(3)}}{f} \sum_{l=0}^3 d_{\tau l}(\theta) X^l\right) = \sum_{l=0}^3 d_{\tau l}(\theta) E\left(\frac{f^{(3)}}{f} \cdot X^l\right) = d_{\tau 3}(\theta) \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} E(X^3) \neq 0 \\ J_{\Delta 2} &= E\left(\frac{f^{(\Delta)}}{f} \sum_{l=0}^2 d_{\tau l}(\theta) X^l\right) = \sum_{l=0}^2 d_{\tau l}(\theta) E\left(\frac{f^{(\Delta)}}{f} \cdot X^l\right) = d_{\tau 2}(\theta) \frac{\partial^\Delta}{\partial \theta^\Delta} E(X^2) \neq 0 \\ J_{\Delta 3} &= \sum_{l=0}^3 d_{\tau l}(\theta) E\left(\frac{f^{(\Delta)}}{f} \cdot X^l\right) = d_{\tau 2}(\theta) \frac{\partial^\Delta}{\partial \theta^\Delta} E(X^2) + d_{\tau 3}(\theta) \frac{\partial^\Delta}{\partial \theta^\Delta} E(X^3) \neq 0 \end{aligned}$$

و برای درایه‌های قطر اصلی:

$$\begin{aligned} J_{rr} &= E \left( \frac{f^{(r)}}{f} \sum_{l=0}^r d_{rl}(\theta) X^l \right) \\ &= \sum_{l=0}^r d_{rl}(\theta) E \left( \frac{f^{(r)}}{f} \cdot X^l \right) \\ &= \sum_{l=1}^r d_{rl}(\theta) \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} E(X^l) \neq 0, \end{aligned}$$

که در آن  $r = 1, 2, 3, 4, 5$ . پس ماتریس باتاچاریای  $5 \times 5$  برای این‌گونه خانواده‌های توزیع‌ها به صورت کلی زیر می‌باشد:

$$(2) \quad \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22} & J_{23} & 0 & 0 \\ & & J_{33} & J_{34} & J_{35} \\ & & & J_{44} & J_{45} \\ & & & & J_{55} \end{pmatrix}.$$

همان‌طور که دیدیم برای به دست آوردن کران‌های باتاچاریا کافی است گشتاورهای غیر مرکزی آن توزیع را داشته باشیم. در ادامه‌ی مطلب به کمک نرم‌افزارهای ریاضی و آماری، پنج کران اول باتاچاریا را در توزیع گاوسی و ارون برای برآوردگرهای نرخ شکست و ضریب تغییرات محاسبه می‌کنیم.

### ۳/۱/۱ ماتریس باتاچاریا در توزیع گاوسی و ارون

توزیع گاوسی و ارون یک توزیع دو پارامتری با تکیه‌گاه مثبت است که کاربردهای بسیار متعددی در زمینه‌های مختلف دارد که از جمله‌ی آن می‌توان به کاربرد آن در مدل‌های بقا، آزمون بقا و مسائل قابلیت اعتماد اشاره نمود. نام توزیع گاوسی و ارون برگرفته از این حقیقت است که تابع تجمعی انباشتک (cumulant) این توزیع، و ارون تابع انباشتک توزیع گاوسی است.

اگر  $X$  دارای توزیع گاوسی و ارون باشد، یعنی  $X \sim IG(\theta, \lambda)$ ، آن‌گاه تابع چگالی آن به صورت زیر

است:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp \left\{ \frac{-\lambda(x - \theta)^2}{2\theta^2 x} \right\},$$

که در آن  $x, \theta, \lambda > 0$  و  $E(X) = \theta$  و  $\text{var}(X) = \frac{\theta^2}{\lambda}$  و تابع مولد گشتاور آن برای  $t < \frac{\lambda}{\theta^2}$  به صورت

زیر است:

$$M_X(t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2\theta^2 t}{\lambda}} \right) \right\}.$$

سشادری (۱۹۸۸) در این خانواده‌ی توزیع‌ها نشان داد که گشتاورهای غیر مرکزی دارای شکل بسته‌ای به صورت زیراند:

$$E(X^r) = \mu^r \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(s+r-1)!}{s!(r-s-1)!} \left( \frac{2\lambda}{\theta} \right)^{-s}.$$

لذا با در نظر گرفتن پارامتر  $\lambda$  به‌عنوان یک عدد معلوم و ثابت، درایه‌های ماتریس باتاچاریای  $5 \times 5$  را که به صورت (۲) است محاسبه کرده‌ایم، که نتیجه‌ی کار به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\lambda}{\theta^3}, \\ J_{22} &= \frac{6\lambda}{\theta^5} + \frac{2\lambda^2}{\theta^6}, \\ J_{33} &= \frac{126\lambda}{\theta^7} + \frac{54\lambda^2}{\theta^8} + \frac{6\lambda^3}{\theta^9}, \\ J_{44} &= \frac{6210\lambda}{\theta^9} + \frac{2664\lambda^2}{\theta^{10}} + \frac{432\lambda^3}{\theta^{11}} + \frac{24\lambda^4}{\theta^{12}}, \\ J_{55} &= \frac{545400\lambda}{\theta^{11}} + \frac{232200\lambda^2}{\theta^{12}} + \frac{41400\lambda^3}{\theta^{13}} + \frac{3600\lambda^4}{\theta^{14}} + \frac{120\lambda^5}{\theta^{15}}, \\ J_{23} &= \frac{6\lambda}{\theta^6}, \\ J_{34} &= \frac{360\lambda}{\theta^8} + \frac{72\lambda^2}{\theta^9}, \\ J_{35} &= \frac{360\lambda}{\theta^9}, \\ J_{45} &= \frac{31320\lambda}{\theta^{10}} + \frac{9360\lambda^2}{\theta^{11}} + \frac{720\lambda^3}{\theta^{12}}. \end{aligned}$$

مثال ۳ (تابع نسبت شکست در توزیع گاوسی وارون). یکی از کاربردهای مهم توزیع گاوسی وارون در مسائل قابلیت اعتماد می‌باشد. لذا در این مثال، کران باتاچاریا را برای واریانس برآوردگر نسبت شکست در این توزیع محاسبه کرده‌ایم. نسبت شکست در توزیع  $IG(\theta, \lambda)$  به صورت زیر است:

جدول ۳. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر تابع نسبت شکست  $\tau(\theta) = \frac{\lambda}{\sqrt{\theta\tau}}$  در توزیع گاوسی وارون

$\theta$	$\lambda$	$n = 5$					$n = 20$				
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
۲	۱	۰٫۰۲۵	۰٫۱۰۶۸	۰٫۲۳۷۲	۰٫۳۹۹۹	۰٫۵۸۱۶	۰٫۰۰۶۲۵	۰٫۰۱۴۹	۰٫۰۲۱۸	۰٫۰۲۶۲	۰٫۰۲۹۴
۱	۲	۰٫۱	۰٫۲۳۸	۰٫۳۴۸	۰٫۴۲۳	۰٫۴۷۱	۰٫۰۲۵	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۸	۰٫۰۳۸	۰٫۰۳۹
۰٫۶	۴	۰٫۲۳۱	۰٫۳۴۶	۰٫۳۸۲	۰٫۳۹۲	۰٫۳۹۴	۰٫۰۵۷۸	۰٫۰۶۵۵	۰٫۰۶۶۱	۰٫۰۶۶۲	۰٫۰۶۶۲

  

$\theta$	$\lambda$	$n = 50$					$n = 100$				
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
۲	۱	۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۰۴۱	۰٫۰۰۴۷	۰٫۰۰۴۹	۰٫۰۰۵۰	۰٫۰۰۱۲۵	۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۰۱۷۶	۰٫۰۰۱۷۸	۰٫۰۰۱۷۸
۱	۲	۰٫۱	۰٫۱۱۷	۰٫۱۱۹۴	۰٫۱۱۹۶	۰٫۱۱۹۷	۰٫۰۰۵	۰٫۰۰۵۴۴	۰٫۰۰۵۴۶	۰٫۰۰۵۴۷	۰٫۰۰۵۴۷
۰٫۶	۴	۰٫۰۲۳۱	۰٫۰۲۴۳	۰٫۰۲۴۴	۰٫۰۲۴۴	۰٫۰۲۴۴	۰٫۰۱۱۵	۰٫۰۱۱۸۸	۰٫۰۱۱۸۹	۰٫۰۱۱۸۹	۰٫۰۱۱۸۹

$$Z(t) = Z(t; \theta, \lambda) = \frac{f_T(t; \theta, \lambda)}{1 - F_T(t; \theta, \lambda)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}t^{\tau}}} \exp\left\{-\frac{\lambda(t-\theta)^{\tau}}{2\theta^{\tau}t}\right\}}{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}} - \frac{\sqrt{\lambda t}}{\theta}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}} - \frac{\sqrt{\lambda t}}{\theta}\right) \exp\left\{\frac{\tau\lambda}{\theta}\right\}}$$

که در آن  $t, \theta, \lambda > 0$ . چهبکارا و فلکس (۱۹۷۷) نشان دادند که هنگامی که  $t \rightarrow \infty$ ، عبارت فوق به  $\frac{\lambda}{\sqrt{\theta\tau}}$  میل می‌کند.

در این مثال می‌خواهیم واریانس برآوردگر تابع  $\tau(\theta) = \frac{\lambda}{\sqrt{\theta\tau}}$  را به کمک کران‌های باتاچاریا تقریب بزنیم.  $B_1, \dots, B_5$  پنج کران اول باتاچاریا می‌باشند که برای مقادیر مختلف  $n$  و  $\lambda$  و  $\theta$  در جدول ۳ ارائه شده‌اند. همان‌طور که در این جدول دیده می‌شود، با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار مشخصی میل می‌کند.

مثال ۴ (ضریب تغییرات در توزیع گاوسی وارون). سیشادری (۱۹۸۸) برای توزیع گاوسی وارون، یک برآوردگر نااریب برای دوم ضریب تغییرات پیدا کرد و نشان داد که این برآوردگر در حقیقت یک  $U$ -آماره می‌باشد. همچنین او توزیع دقیق این برآوردگر را نیز به دست آورد. ضریب تغییرات در توزیع گاوسی وارون به صورت زیر می‌باشد:

$$CV = \frac{\sqrt{\text{var}(X)}}{E(X)} = \sqrt{\frac{\theta}{\lambda}}$$

$B_1, \dots, B_5$  پنج کران اول باتاچاریا برای  $\sqrt{\frac{\theta}{\lambda}}$  می‌باشند که برای مقادیر مختلف  $\lambda$  و  $\theta$  در جدول ۴ ارائه

جدول ۴. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر ضریب تغییرات  $\tau(\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\lambda}}$  در توزیع گاوسی وارون

$\theta$	$\lambda$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
۱	۱	۰٫۲۵۰۰	۰٫۲۵۳۹	۰٫۲۵۴۵	۰٫۲۵۴۷	۰٫۲۵۴۸
۱	۲	۰٫۱۲۵۰۰	۰٫۱۲۶۵۶	۰٫۱۲۶۷۶	۰٫۱۲۶۸۱	۰٫۱۲۶۸۳
۲	۱	۱٫۰۰۰	۱٫۰۱۷۸	۱٫۰۲۱۴	۱٫۰۲۲۷	۱٫۰۲۳۳
۴	۸	۰٫۵۰۰۰	۰٫۵۰۶۲۵	۰٫۵۰۷۰۶	۰٫۵۰۸۷۲۶	۰٫۵۰۹۳۲
۰٫۶	۰٫۵	۰٫۱۸۰۰	۰٫۱۸۲۹	۰٫۱۸۳۴	۰٫۱۸۳۶	۰٫۱۸۳۷

شده‌اند. همان‌طور که در این جدول نیز مشخص است، با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار مشخصی میل می‌کند.

### ۳/۲ توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ از $E(X)$ است، ولی $E(X)$ تابعی خطی از $\theta$ نیست

ماتریس باتاچاریا در توزیع‌هایی که  $E(X)$  تابعی خطی از  $\theta$  نمی‌باشد ولی واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ از  $E(X)$  است به صورت (۲) نمی‌باشد. از جمله‌ی توزیع‌هایی که دارای این ویژگی هستند می‌توان توزیع‌های آبل، تاکاس، کندال رسل، استریک آرکسین و لارج آرکسین را نام برد که دارای تابع واریانس درجه‌ی سوم از امید ریاضی  $X$  می‌باشند. در این مقاله فقط به بررسی دو توزیع آبل و تاکاس می‌پردازیم.

#### ۳/۲/۱ توزیع آبل

این توزیع جزو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی سه از میانگین می‌باشد که در آن، میانگین، تابعی خطی از  $\theta$  نیست و از آن به‌عنوان توزیع پواسون تعمیم‌یافته یاد می‌کنند. این توزیع را به صورت GP( $\alpha, \theta$ ) نمایش می‌دهند که در آن،  $\alpha$  مقداری معلوم می‌باشد، و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{(\lambda + \alpha x)^{x-1}}{x!} \theta^x e^{-\theta(\lambda + \alpha x)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{\theta}, \quad 0 < \theta$$

و  $\mu_1 = E(X) = \frac{\theta}{1 - \alpha\theta}$  و  $\text{var}(X) = \mu_1(\lambda + \alpha\mu_1)^2$ . به‌ازای  $\alpha = 0$  این توزیع تبدیل به توزیع پواسون می‌شود.

تابع مولد گشتاور این توزیع نیز به شکل زیر است:

$$M_X(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha} [W(-\alpha\theta \exp(-\alpha\theta + t)) + \alpha\theta] \right\}$$

که در آن  $W$  تابع لامبرت می باشد که برای جزئیات بیشتر می توانید به آمباگاس پیتیا و بالا کریشانان (۱۹۹۴) مراجعه کنید. این دو توانستند گشتاورهای مرکزی این توزیع را با مشتق گیری از تابع مولد گشتاور محاسبه کنند که چهارگشتاور مرکزی اول این توزیع به صورت زیر است:

$$\mu_1 = \theta M,$$

$$\mu_2 = \theta M^2,$$

$$\mu_3 = \theta(3M - 2)M^3,$$

$$\mu_4 = 3\theta^2 M^4 + \theta(15M^2 - 20M + 6)M^5.$$

که در آن  $M = (1 - \alpha\theta)^{-1}$ . در این خانواده ی توزیع ها ماتریس باتاچاریا نه به صورت قطری است و نه به صورت (۲). با استفاده از لم ۱ می توانیم درایه های این ماتریس را محاسبه کنیم. در زیر، درایه های ماتریس باتاچاریای  $4 \times 4$  برای توزیع آبل را در حالت  $\alpha = 1$  محاسبه کرده ایم:

$$J_{11} = \frac{1}{\theta(1 - \theta)},$$

$$J_{12} = \frac{2}{\theta(1 - \theta)^2},$$

$$J_{13} = \frac{6}{\theta(1 - \theta)^3},$$

$$J_{14} = \frac{24}{\theta(1 - \theta)^4},$$

$$J_{22} = \frac{2}{\theta^2(1 - \theta)^2}(2\theta + 3),$$

$$J_{23} = \frac{6}{\theta^2(1 - \theta)^3}(2\theta + 7),$$

$$J_{24} = \frac{24}{\theta^2(1 - \theta)^4}(\theta + 6),$$

$$J_{33} = \frac{6}{\theta^3(1 - \theta)^3}(6\theta^2 + 53\theta + 16).$$

جدول ۵. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر تابع  $\tau(\theta) = \exp\{-\theta\}$  در توزیع آبل

$\theta$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
۰٫۰۱	۰٫۰۰۹۷۰	۰٫۰۰۹۸۲	۰٫۰۰۹۸۵	۰٫۰۰۹۸۵
۰٫۱	۰٫۰۷۳۶	۰٫۰۸۴۰	۰٫۰۸۵۷	۰٫۰۸۷۳
۰٫۲	۰٫۱۰۷۲	۰٫۱۳۵۲	۰٫۱۴۳۹	۰٫۱۴۶۰
۰٫۴	۰٫۱۰۷۸	۰٫۱۵۶۴	۰٫۱۸۲۲	۰٫۱۹۳۰
۰٫۸	۰٫۰۳۲	۰٫۰۵۳	۰٫۰۶۹	۰٫۰۷۸
۰٫۹	۰٫۰۱۴۸	۰٫۰۲۴۷	۰٫۰۳۲	۰٫۰۳۶

$$J_{34} = \frac{24^0}{\theta^3(1-\theta)^6}(11\theta + 10),$$

$$J_{44} = \frac{24}{\theta^4(1-\theta)^7}(24\theta^3 + 782\theta^2 + 1004\theta + 125),$$

که شکل کلی ماتریس به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ & & J_{33} & J_{34} \\ & & & J_{44} \end{pmatrix}.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، هیچ درایه‌ای از ماتریس، صفر نیست.

مثال ۵. برای مشاهده‌ی این که کران‌های باتاچاریا با افزایش مرتبه‌ی آن به واریانس آماره نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، می‌خواهیم واریانس برآوردگر تابع  $\tau(\theta) = e^{-\theta}$  را با استفاده از کران‌های باتاچاریا تقریب بزنیم. بدین منظور، در جدول ۵ برای  $\theta$ های مختلف، چهار کران اول باتاچاریا را محاسبه کرده‌ایم. همان‌طور که در این جدول نیز مشخص است، با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار مشخصی میل می‌کند.

## ۳/۲/۲ توزیع تاکاس

این توزیع نیز همانند توزیع آبل جزو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی سه از میانگین می‌باشد که در آن، میانگین، تابعی خطی از  $\theta$  نیست و از آن به عنوان توزیع دوجمله‌ای منفی تعمیم‌یافته یاد

جدول ۶. کران‌های باتاچاریا برای واریانس  
برآوردگر تابع  $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$  در توزیع تاکاس

$\theta$	$m$	$B_1$	$B_2$
۲	۱	۰٫۱۲۵	۰٫۱۸۷۵
۴	۲	۰٫۰۹۷۳۷۵	۰٫۱۳۲۹۲
۸	۴	۰٫۰۵۲۶۸	۰٫۰۷۷۲۰
۱۶	۸	۰٫۰۲۹۲	۰٫۰۴۱۱۷

می‌کنند. این توزیع را به صورت  $\text{GNB}(1, m, \theta)$  نمایش می‌دهند، که در آن  $m$  مقدار معلومی می‌باشد، و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{1+mx} \binom{1+mx}{x} \left(\frac{1}{\theta}\right)^x \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{1+(m-1)x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن  $0 \leq m < \theta$  و  $1 < \theta$ .

با فرض  $p = \frac{1}{\theta}$  داریم  $E(x) = \frac{p}{(1-mp)}$  و  $\mu = E(x)$  و  $\text{var}(X) = \mu(1+m\mu)(1+(m-1)\mu)$  و دوجمله‌ای منفی تبدیل می‌شود. در این توزیع، درایه‌های ماتریس باتاچاریای  $2 \times 2$  به صورت زیر می‌باشد:

$$J_{11} = \frac{1}{\theta(1-\theta)(m-\theta)},$$

$$J_{12} = \frac{2}{\theta(1-\theta)(m-\theta)^2},$$

$$J_{22} = \frac{4\theta^2 - 4\theta + 4\theta m + 2m^2 - 6m}{\theta^2(1-\theta)^2(\theta-m)^3}.$$

مثال ۶. فرض کنید می‌خواهیم واریانس برآوردگر تابع  $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$  را در توزیع  $\text{GNB}(1, m, \theta)$  تقریب بزنیم. در جدول ۶ دو کران اول باتاچاریا را برای مقادیر مختلف  $m$  و  $\theta$  محاسبه کرده‌ایم.

## ۴ نتیجه‌گیری

در بسیاری از مواقع که واریانس یک آماره را به راحتی نمی‌توان برآورد کرد، از کران کرامر-رائو برای تقریب واریانس آماره استفاده می‌شود و در صورتی که بتوان به سادگی کران باتاچاریا را به دست آورد، قطعاً تقریب



واریانس آماره به‌کمک کران باتاچاریا دقیق‌تر از تقریب کران کرامر-رائو خواهد بود.

## سیاس‌گذاری

این تحقیق با حمایت پژوهشکده‌ی آمار انجام شده است (کد اختصاصی ۸۷۱۲).

## مرجع‌ها

- Ambagaspitiya, R.S.; Balakrishnan, N. (1994). On the compound generalized Poisson distributions. *Astin Bulletin* **24**,
- Anderson, T.W. (1958). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley, New York.
- Bhattacharyya, A. (1946). On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhya* **8**, 1-14.
- Bhattacharyya, A. (1947). On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation II. *Sankhya* **8**, 201-218.
- Blight, B.J.N; Rao, R.V. (1974). The convergence of Bhattacharyya bounds. *Biometrika* **61**, 137-142.
- Chhikara, R.S.; Folks, J.L. (1997). The inverse Gaussian distribution as a life time model. *Technometrics* **19**, 461-468.
- Fend, A.V. (1959). On the attainment of Cramer-Rao and Bhattacharyya bounds for the variance of an estimate. *Ann. Math. Statist.* **30**, 381-388.
- Haldan, J.B.S. (1945). On the method of estimating frequencies. *Ann. Eugen.* **11**, 182-187.
- Letac, G.; Mora, M. (1990). Natural real exponential families with cubic variance functions.
- Mohtashami Borzadaran, G.R. (2001). Results related to the Bhattacharyya matrices. *Sankhya* **63**, 113-117.
- Mohtashami Borzadaran, G.R. (2006). A note via diagonality of the  $2 \times 2$  Bhattacharyya matrices. *Journal of Mathematical Sciences and Informatics* **1** 73-78.
- Seshadri, V. (1988). A U-statistic and estimation for the inverse Gaussian distribution. *Statistics and Probability Letters* **7**, 47-49.
- Shanbhag, D.N. (1972). Some characterizations based on the Bhattacharyya matrix. *Journal of Applied Probability* **9**, 580-587.
- Shanbhag, D. N. (1979). Diagonality of the Bhattacharyya matrix as a characterization. *Theory of Probability and its Applications* **24**, 430-433.

Zacks, S.; Even, M. (1966). The efficiencies in small samples of the maximum likelihood and best unbiased estimators of reliability functions. *J. Am. Statist. Assoc.* **61**, 1033-51.

غلامرضا محتشمی برزاداران  
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،  
عضو قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی،  
دانشگاه فردوسی مشهد،  
مشهد، ایران.  
پایم‌نگار: [gmb1334@yahoo.com](mailto:gmb1334@yahoo.com)

محمد خراشادیزاده  
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،  
دانشگاه فردوسی مشهد،  
مشهد، ایران.  
پایم‌نگار: [khorashadi\\_s80@yahoo.com](mailto:khorashadi_s80@yahoo.com)