Statistical Research and Training Center
مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
©(2005) J. Stat. Res. Iran **2** 149-166
دوره‌ی ۱، شماره‌ی ۲، پاییز و زمستان ۱۳۸۳، صص ۱۴۳-۱۶۰
پژوهشکده‌ی آمار

گشتاورهای متغیّر همراه رکورد کلاسیک و کران‌های ناپارامتری میانگین تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن

مرتضیٰ امینی* و جعفر احمدی

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده. در یک دنباله از متغیّرهای تصادفی جفت‌شده، زمانی‌که فقط بررسی دنباله‌ای از آماره‌های یکی از دو مؤلفه مد نظر باشد، مؤلفه‌ی دوم متناظر با هر آماره تحت عنوان متغیّر همراه (concomitant) آن آماره مورد بررسی قرار می‌گیرد. از جمله‌ی این آماره‌ها می‌توان آماره‌های ترتیبی، رکوردها، سانسورها و غیره را نام برد. در این مقاله هدف بررسی خواص دنباله‌ی متغیّرهای همراه رکوردها است. در یک دنباله از متغیّرهای تصادفی، رکوردها مقادیری هستند که از مشاهدات قبلی بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر هستند. بسیاری از پدیده‌های طبیعی، داده‌های مربوط به مسابقات ورزشی و یا آزمایه‌های بالینی در قالب این چنین الگوهای احتمال، قابل بررسی هستند. بدین منظور برای دنباله‌ای از جفت مشاهدات مستقل و هم‌توزیع با متغیّرهای تصادفی (X, Y) خواص گشتاورهای متغیّرهای تصادفی Y متناظر با رکوردهای متغیّر تصادفی X در حالت کلی و تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن (Farlie-Gumbel-Morgenstern) مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه کران‌های ناپارامتری میانگین تحت مدل بالا و به‌شیوه‌های متفاوت به دست آمده و با هم مقایسه شده‌اند.

واژگان کلیدی. رکورد بالا؛ متغیّر همراه؛ گشتاور؛ مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن؛ نابرابری کوشی-شوارتس؛ کران ناپارامتری.

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات.

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.143]

۱ مقدمه

در بسیاری از موارد در دنباله‌ای از متغیّرهای تصادفی جفت‌شده، فقط بررسی دنباله‌ای از آماره‌های یکی از دو مؤلفه مد نظر است. این مسئله می‌تواند به‌سبب عدم دسترسی آسان به مؤلفه‌ی دوم، اهمیت نخستین مؤلفه، یا پیچیدگی مدل‌های ریاضی توأم باشد. برای مثال، درگزینش‌های مرحله‌ای، افراد در مرحله‌ی اول بر اساس مهم‌ترین مؤلفه انتخاب می‌شوند. بنا بر این، مؤلفه‌ی دوم هر فرد انتخاب شده تابعی ازگزینش مرحله‌ی اول است. مطالعه در خصوص چنین مسائلی گوشه‌ای ازکاربردهای متغیّر همراه آماره‌های ترتیبی را نشان می‌دهد. از جمله کارهای انجام شده در این خصوص می‌توان به دیوید و ناگاراجا (۱۹۸۸) اشاره کرد. در خصوص رکوردها نیز با مسائلی مشابه روبه‌رو هستیم. برای مثال در یک مسابقه‌ی ورزشی وزنه‌برداری، رکوردهای وزنه‌برداران در رقابت دوضرب ثبت شده است و ما علاقه‌مند به کسب اطلاعات بیش‌تر درباره‌ی مقدار رکوردهای ورزشکاران در رقابت یک‌ضرب هستیم. تاکنون مطالعه‌ی قابل توجهی در مورد متغیّر همراه رکوردها انجام نشده است. هوچنز (۱۹۸۴) فقط نگاهی کوتاه به بعضی خواص متغیّر همراه رکورد بالا دارد. وی همچنین به بررسی مثال‌هایی کوتاه در این خصوص پرداخته است. از جمله کارهای اخیر انجام شده در این مورد می‌توان به احسان ا... (۱۹۹۴، ۲۰۰۰)، خالدی وکوچار (۲۰۰۲)، و رکب و احسان ا... (۲۰۰۲) اشاره کرد. برای ارائه‌ی تعاریف دقیق‌تر، نخست، آماره‌های رکورد را تعریف می‌کنیم.

در بسیاری از موارد در بررسی دنباله‌ای از پدیده‌های تصادفی، فقط مشاهداتی ثبت می‌شوند که از مقادیر پیشین خود بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر باشند. این دنباله از متغیّرها به آماره‌ی رکورد معروف‌اند. بدین ترتیب که اگر مشاهده‌ی جدید از مشاهدات قبل از خودش بزرگ‌تر باشد آن را رکورد بالا و اگرکوچک‌تر باشد آن را رکورد پایین می‌نامیم. برای مثال می‌توان از ثبت بزرگ‌ترین زلزله در مقیاس ریشتر تا زمان حال، بیش‌ترین رکورد ثبت شده توسط یک ورزشکار، یا دمای سردترین روز یک ماه خاص از سال در یک شهر نام برد. این نظریه به‌دلیل اهمیت کاربردی در زمینه‌های مختلف به‌تازگی نظر بسیاری از پژوهشگران را به‌خود جلب کرده است. همچنین، مقاله‌ها وکتاب‌های زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است. در این‌جا ما فقط به بیان تعریف‌های ابتدایی مربوط به رکوردهای بالا بسنده می‌کنیم. برای آگاهی بیش‌تر از این پژوهش‌ها می‌توان به آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه کرد. فرض کنید X_1، X_2، ... دنباله‌ای نامتناهی از متغیّرهای تصادفی باشد. زمان رخداد رکوردها با دنباله‌ی $\{T_n, n \geqslant 0\}$ نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_0 = 1, \quad \text{با احتمال یک}$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.143]

و برای هر $n \geqslant ۱$

$$T_n = \min\{j : X_j > X_{T_{n-۱}}\}.$$

در دنباله‌ی نامتناهی $\{X_i\}$ از متغیّرهای تصادفی، مشاهده‌ی X_j را یک رکورد بالا می‌گوییم اگر برای هر $i < j$ داشته باشیم $X_j > X_i$. به‌عبارت دیگر با استفاده از تعریف ۱،

$$R_n = X_{T_n}, \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

با فرض اینکه X_iها متغیّرهای تصادفی پیوسته‌ی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال f_X و تابع توزیع تجمعی F_X باشند، تابع چگالی رکورد nام بالا به‌صورت زیر است:

$$f_{R_n}(x) = \frac{۱}{n!} f_X(x)\{-\log(S_X(x))\}^n, \tag{۱}$$

که در آن

$$S_X(x) = ۱ - F_X(x).$$

همچنین چگالی توأم نخستین $n + ۱$ رکورد بالا برابر است با:

$$f_{R_۰,...,R_n}(x_۰, ..., x_n) = f_X(x_n) \prod_{i=۰}^{n-۱} \frac{f_X(x_i)}{S_X(x_i)}, \tag{۲}$$

و برای $m < n$ تابع چگالی توأم دو رکورد به‌صورت زیر است:

$$f_{R_m,R_n}(x_۱, x_۲) = \frac{\{-\log(S_X(x_۱))\}^m \left\{-\log\left(\frac{S_X(x_۲)}{S_X(x_۱)}\right)\right\}^{n-m} f_X(x_۱) f_X(x_۲)}{m!(n-m-۱)! S_X(x_۱)}. \tag{۳}$$

برای جزئیات اثبات (۱)، (۲)، و (۳) می‌توان به آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه کرد. دو تعریف ۱ و ۲ را می‌توان به‌صورت توأم نیز مطرح نمود. همچنین می‌توان تعریف متغیّر همراه را در متن آن گنجاند. تعریف ۳ به‌طور هم‌زمان مفاهیم زمان رکورد، دنباله‌ی رکوردها و متغیّر همراه رکوردها را معرفی می‌کند.

فرض کنید (X_i, Y_i)، $i \geqslant ۱$ دنباله‌ای از متغیّرهای تصادفی جفت‌شده باشد. دنباله‌ی متغیّرهای تصادفی جفت‌شده $(R_i, R_{[i]})$، $i \geqslant ۰$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(R_۰, R_{[۰]}) = (X_۱, Y_۱), \quad \text{با احتمال یک}$$

و برای هر $n \geqslant ۱$

$$(R_n, R_{[n]}) = (X_{T_n}, Y_{T_n}),$$

که در آن T_n زمان رخداد nامین رکورد در مؤلفه‌ی اول است.
در این صورت به R_n رکورد nام بالا و به $R_{[n]}$ متغیّر همراه رکورد nام بالا گفته می‌شود. در ادامه‌ی مقاله، منظور از متغیّر همراه nام همان متغیّر همراه رکورد nام بالا است. بخش ۲ شامل توابع چگالی توأم و حاشیه‌ای متغیّر همراه و فرمول‌هایی برای گشتاورهای این متغیّر تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن (FGM) است. در بخش ۳ کران‌های ناپارامتری برای میانگین متغیّر همراه nام تحت مدل FGM با فرضیات متفاوت به دست آمده و با هم مقایسه شده‌اند. مشابه این کران‌ها برای رکوردها و آماره‌های ترتیبی را می‌توان در بالاکریشنان (۱۹۹۰) و ناگاراجا (۱۹۷۸) ملاحظه کرد.

۲ متغیّر همراه تحت مدل FGM

فرض کنید $(X_۱, Y_۱)$، $(X_۲, Y_۲)$، ... دنباله‌ای مستقل و هم‌توزیع از متغیّرهای تصادفی جفت‌شده‌ی پیوسته با تابع توزیع $F(x,y)$ و تابع چگالی $f(x,y)$ باشد. چگالی شرطی Y به‌شرط $X = x$ را با $f_{Y|X}(y|x)$ و چگالی‌های حاشیه‌ای را با $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید $f_{\boldsymbol{R}_k}(\boldsymbol{x}) = f_{R_{r_۱},\dots,R_{r_k}}(x_۱,\dots,x_k)$ نشان دهنده‌ی تابع چگالی احتمال توأم $R_{r_۱},\dots,R_{r_k}$ باشد که در آن

$$۱ \leqslant r_۱ \leqslant \cdots \leqslant r_k \leqslant n, \qquad ۱ \leqslant k \leqslant n.$$

در این صورت با توجه به استقلال زوج‌های (X_i, Y_i)، $i \geqslant ۱$، همان‌طورکه در یانگ (۱۹۷۷) بحث شده است داریم:

$$f_{R_{[r_۱]},\dots,R_{[r_k]}|R_{r_۱},\dots,R_{r_k}}(y_۱,\dots,y_k|x_۱,\dots,x_k) = \prod_{i=۱}^{k} f_{Y|X}(y_i|x_i).$$

بنا بر این، $f_{\boldsymbol{R}_{[K]}}(\boldsymbol{y}) = f_{R_{[r_۱]},\dots,R_{[r_k]}}(y_۱,\dots,y_k)$ ، تابع چگالی توأم k متغیّر همراه $(R_{[r_۱]},\dots,R_{[r_k]})$ به‌صورت زیر است:

$$f_{\boldsymbol{R}_{[k]}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_k}\cdots\int_{-\infty}^{x_۲}\prod_{i=۱}^{k} f_{Y|X}(y_i|x_i) f_{\boldsymbol{R}_k}(\boldsymbol{x})\prod_{i=۱}^{k} dx_i \qquad (۴)$$

تحت مفروضات بالا، $f_{\boldsymbol{R}_{[n+1]}}(\boldsymbol{y}) = f_{R_{[0]},\ldots,R_{[n]}}(y_0,\ldots,y_n)$، تابع چگالی توأم نخستین $n+1$ متغیّر همراه رکوردهای بالا برابر است با:

$$f_{\boldsymbol{R}_{[n+1]}}(\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f_{X,Y}(x_n,y_n)\prod_{i=0}^{n-1}\frac{f_{X,Y}(x_i,y_i)}{S_X(x_i)}\prod_{i=0}^{n}dx_i.$$

بدین ترتیب، تابع چگالی حاشیه‌ای متغیّر همراه nام به‌صورت زیر است:

$$f_{R_{[n]}}(y) = \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\{-\log(S_X(x))\}^n dx. \qquad (۵)$$

رابطه‌ی (۵) نشان‌دهنده‌ی یک رابطه بین تابع چگالی متغیّر همراه و تابع چگالی شرطی Y به‌شرط مقادیر مختلف X است. در واقع با معلوم بودن توزیع متغیّر تصادفی X و گشتاورهای شرطی Y به‌شرط مقادیر مختلف X و با استفاده از مطالب گفته شده، می‌توان فرمول‌هایی به‌صورت زیر برای محاسبه‌ی گشتاورهای متغیّر همراه به دست آورد:

$$\alpha_{[n]}^{(k)} = \mathrm{E}\{\mathrm{E}(Y^k|X=R_n)\}$$

و

$$\alpha_{[m,n]}^{(t,s)} = \mathrm{E}\{\mathrm{E}(Y^t|X=R_m)\mathrm{E}(Y^s|X=R_n)\}. \qquad (۶)$$

که در آن $\alpha_{[n]}^{(k)}$ و $\alpha_{[m,n]}^{(t,s)}$ به‌ترتیب گشتاور مرتبه‌ی kام و گشتاور حاصل‌ضرب متغیّر همراه هستند. برای جزئیات بیش‌تر در خصوص اثبات موارد (۴)، (۵) و (۶) می‌توان به رکب و احسان ا... (۲۰۰۲) یا خالدی و کوچار (۲۰۰۱) مراجعه کرد.

حال خواص متغیّر همراه و گشتاورهای آن را تحت مدل FGM بررسی می‌کنیم. مدل FGM در حقیقت مدلی از چگالی توأم دو متغیّر تصادفی بر حسب چگالی حاشیه‌ای آن دو متغیّر است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

برای یک بردار تصادفی (X,Y) با توابع چگالی حاشیه‌ای $f_Y(y)$ و $f_X(x)$، تابع چگالی توأم مدل FGM به‌صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\{1+\alpha(1-2F_X(x))(1-2F_Y(y))\},$$

که در آن $\alpha\in(-1,1)$.

حال تابع چگالی $R_{[n]}$ را به دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۱ تحت مدل FGM تابع چگالی احتمال متغیّر همراه nام به‌صورت زیر است:

$$f_{R_{[n]}}(y) = f_Y(y)\{1+\alpha(1-2^{-n})(2F_Y(y)-1)\}. \qquad (۷)$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.143]

برهان. با استفاده از (۵) و تحت مدل FGM داده شده در تابع چگالی متغیّر همراه رکورد nام بالا برابر است با:

$$\begin{aligned} f_{R_{[n]}}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \frac{\{-\log(S_X(x))\}^n}{n!} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \frac{\{-\log(S_X(x))\}^n}{n!} dx \\ &= \frac{۱}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(y) \{۱ + \alpha(۱ - ۲F_X(x))(۱ - ۲F_X(x))\} \\ &\quad \times \{-\log(S_X(x))\}^n dx. \end{aligned}$$

با تغییر متغیّر $z = -\log(S_X(x))$ مقدار انتگرال بالا برابر است با:

$$f_Y(y) \left\{ ۱ + \frac{\alpha}{n!} (۲F_Y(y) - ۱) \int_{۰}^{\infty} (e^{-z} - ۲e^{-۲z}) z^n dz \right\},$$

که با محاسبه‌های جبری لازم برهان کامل می‌شود.

چگالی داده شده در (۷) یک رابطه‌ی کاملاً مستقل از رکوردها را برای متغیّرهای همراه آن‌ها فراهم می‌کند. بدین ترتیب می‌توان گشتاورهای مربوط به این متغیّر را فقط با داشتن اطلاعاتی از توزیع متغیّر تصادفی Y بررسی کرد. قضیه‌ی زیر رابطه‌ای بین گشتاور مرتبه‌ی kام متغیّر همراه و دو نوع گشتاور مربوط به توزیع Y را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۲ تحت مدل FGM، گشتاور kام متغیّر همراه nام را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\alpha_{[n]}^{(k)} = \alpha^{(k)} + \alpha(۱ - ۲^{-n}) \, (\alpha_{۲:۲}^{(k)} - \alpha^{(k)}),$$

که در آن $\alpha^{(k)}$ گشتاور kام توزیع Y و $\alpha_{۲:۲}^{(k)}$ گشتاور kام بزرگ‌ترین آماره‌ی مرتّب در یک نمونه‌ی دوتایی از این توزیع است.

برهان. با استفاده از (۷) و تابع چگالی احتمال دومین آماره‌ی ترتیبی در یک نمونه‌ی دوتایی، داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_{[n]}^{(k)} &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k f_{R_{[n]}}(y) dy \\ &= \alpha^{(k)} + \alpha(۱ - ۲^{-n}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} ۲y^k f_Y(y) F_Y(y) \; dy - \alpha^{(k)} \right) \\ &= \alpha^{(k)} + \alpha(۱ - ۲^{-n}) \, (\alpha_{۲:۲}^{(k)} - \alpha^{(k)}). \end{aligned}$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.143]

نتیجه‌ی ۱ با توجه به قضیه‌ی ۳ میانگین و واریانس متغیّر همراه nام برابر است با:

$$\alpha_{[n]} = \mu + \alpha(1 - 2^{-n})\,(\alpha_{2:2} - \mu),$$

و

$$\begin{aligned}\sigma^2_{[n]} &= \sigma^2 + \alpha(1 - 2^{-n})(\,\mu^2 - \sigma^2 + \alpha^{(2)}_{2:2} - 2\mu\alpha_{2:2}) \\ &\quad - \alpha^2(1 - 2^{-n})^2(\alpha_{2:2} - \mu)^2,\end{aligned}$$

که در آن‌ها μ و σ^2 میانگین و واریانس متغیّر تصادفی Y هستند.

مثال ۱ فرض کنید Y_i ها دارای توزیع نرمال استاندارد باشند. در این صورت می‌توان نشان داد $\alpha_{2:2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ و $\alpha^{(2)}_{2:2} = \alpha^{(2)} = 1$. بنا بر این، میانگین و واریانس متغیّر همراه nام به‌ترتیب برابرند با:

$$\alpha_{[n]} = \alpha(1 - 2^{-n})\,\alpha_{2:2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\,(1 - 2^{-n}),$$

و

$$\sigma^2_{[n]} = 1 - \frac{\alpha^2}{\pi}\,(1 - 2^{-n})^2.$$

اما برای به دست آوردن گشتاورهای حاصل‌ضرب به توزیع توأم دو متغیّر همراه نیاز داریم. این تابع چگالی توأم در قضیه‌ی ۳ به دست آمده است. اما قبل از بیان قضیه نیاز به محاسبه‌ی یک انتگرال در لم زیر داریم.

لم ۱ فرض کنید برای $m < n$،

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_1}^{\infty} F_X(x_1)^a F_X(x_2)^b f_{R_m,R_n}(x_1,x_2)dx_2\,dx_1,$$

که در آن $a = 0,\ 1$، $b = 0,\ 1$.
در این صورت داریم:

$$I(a,b) = \begin{cases} 1, & a = 0,\ b = 0 \\ (1 - 2^{-n-1}), & a = 0,\ b = 1 \\ (1 - 2^{-m-1}), & a = 1,\ b = 0 \\ 1 - 2^{-m-1} - 2^{-n-1} + 3^{-m-1}2^{m-n}. & a = 1,\ b = 1 \end{cases}$$

برهان. با تغییر متغیّر $z = -\log\left(\frac{S_X(x_۲)}{S_X(x_۱)}\right)$ برای انتگرال داخلی و تغییر متغیّر $w = -\log(S_X(x_۱))$ برای انتگرال بیرونی مقدار انتگرال به‌راحتی محاسبه می‌شود.

قضیه‌ی ۳ تحت مفروضات مورد بحث، برای $m < n$ چگالی توأم دو متغیّر همراه برابر است با:

$$\begin{aligned} f_{R_{[m]},R_{[n]}}(y_۱,y_۲) = f_Y(y_۱)f_Y(y_۲)\Big\{ & ۱ + \alpha(۲F_Y(y_۱)-۱)(۱-۲^{-m}) \\ & + \alpha(۲F_Y(y_۲)-۱)(۱-۲^{-n}) + \alpha^۲(۲F_Y(y_۱)-۱) \\ & \times (۲F_Y(y_۲)-۱)(۳^{-m-۱}۲^{m+۲-n} - ۲^{-m} - ۲^{-n} + ۱)\Big\}. \end{aligned}$$

برهان. با استفاده از (۴) می‌توان نوشت:

$$f_{R_{[m]},R_{[n]}}(y_۱,y_۲) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_۱}^{\infty} f_{Y|X}(y_۱|x_۱)f_{Y|X}(y_۲|x_۲)f_{R_m,R_n}(x_۱,x_۲)dx_۲\, dx_۱.$$

بنا بر این، تحت مدل FGM داریم:

$$f_{R_{[m]},R_{[n]}}(y_۱,y_۲) = f_Y(y_۱)f_Y(y_۲)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_۱}^{\infty} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f_{R_m,R_n}(x_۱,x_۲)dx_۲\, dx_۱,$$

که در آن

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \prod_{i=۱,۲}[۱+\alpha(۲F_X(x_i)-۱)(۲F_Y(y_i)-۱)].$$

پس با استفاده از لم ۱ اثبات کامل می‌شود.

با استفاده از قضیه‌ی ۳ نتایج زیر را داریم.

نتیجه‌ی ۲ تحت مدل FGM، برای t و s دلخواه و $m < n$ داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_{[m,n]}^{(t,s)} = {} & \alpha^{(s)}\alpha^{(t)} + \alpha(۱-۲^{-n})\,\alpha^{(t)}(\alpha_{۲:۲}^{(s)}-\alpha^{(s)}) \\ & + \alpha(۱-۲^{-m})\,\alpha^{(s)}(\alpha_{۲:۲}^{(t)}-\alpha^{(t)}) + (\alpha_{۲:۲}^{(t)}-\alpha^{(t)})(\alpha_{۲:۲}^{(s)}-\alpha^{(s)}) \\ & \times \alpha^۲\,(۳^{-m-۱}۲^{m-n+۲} - ۲^{-m} - ۲^{-n} + ۱). \end{aligned} \tag{۸}$$

نتیجه‌ی ۳ تحت مدل FGM، کوواریانس دو متغیّر همراه برای $m < n$ برابر است با:

$$\mathrm{Cov}(R_{[m]},R_{[n]}) = (۳^{-m-۱}۲^{m-n+۲} - ۲^{-m-n})\,\alpha^۲(\alpha_{۲:۲}-\mu)^۲. \tag{۹}$$

برهان. با جایگذاری $s=t=1$ در نتیجه‌ی قبل داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R_{[m]}R_{[n]}) &= \mu^2 + (2-2^{-m}-2^{-n})\,\alpha\mu(\alpha_{2:2}-\mu)\\ &\quad + (3^{-m-1}2^{m-n+2}-2^{-m}-2^{-n}+1)\,\alpha^2(\alpha_{2:2}-\mu)^2.\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از نتیجه‌ی ۱

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R_{[m]})\mathrm{E}(R_{[n]}) &= \mu^2 + (2-2^{-m}-2^{-n})\,\alpha\mu(\alpha_{2:2}-\mu)\\ &\quad + (1-2^{-n})(1-2^{-m})\,\alpha^2(\alpha_{2:2}-\mu)^2.\end{aligned}$$

بنا بر این (۹) حاصل می‌شود.

تذکر ۱ نتیجه‌ی ۳ را می‌توان با استفاده از (۶) و با توجه به این که در مدل FGM داریم:

$$\mathrm{E}(Y|X=x)=\mu+\alpha(2F_X(x)-1)(\alpha_{2:2}-\mu),$$

به دست آورد.

مثال ۲ (ادامه‌ی مثال ۱) بنا بر (۹) کوواریانس دو متغیّر همراه nام و mام برای $m<n$ برابر است با:

$$\mathrm{Cov}(R_{[m]},R_{[n]})=\frac{\alpha^2}{\pi}(3^{-m-1}2^{m-n+2}-2^{-m-n}),$$

با توجه به واریانس به دست آمده در مثال ۱ نمی‌توان ضریب همبستگی را به‌صورت مضربی از α^2 نوشت. بنا بر این، مقادیر ضریب همبستگی به‌منظور مقایسه به‌ازای $\alpha=\frac{1}{2}$ برای بعضی مقادیر مختلف n و m در جدول ۱ داده شده است.

جدول ۱. جدول مقادیر ضریب همبستگی دو متغیّر همراه در توزیع نرمال استاندارد

n \ m	۱	۳	۵	۱۰
۲	۰٫۰۰۷۹۹			
۴	۰٫۰۰۲۰۲	۰٫۰۰۱۴۴		
۶	۰٫۰۰۰۵۱	۰٫۰۰۰۳۶	۰٫۰۰۰۱۹	
۱۱	۰٫۰۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰
۱۵	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰

۳ کران‌های ناپارامتری میانگین تحت مدل FGM

در مواردی که توزیع دقیق Y_i ها معلوم نباشد با استفاده از شیوه‌های مختلف، می‌توان یک کران بالا برای میانگین $R_{[n]}$ یافت. یکی از متداول‌ترین این شیوه‌ها استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس است. در این بخش با استفاده از این نابرابری و تحت شرایط متفاوت، کران‌های ناپارامتری بالای متفاوت برای میانگین متغیّر همراه به دست می‌آید.

۳٫۱ کران عمومی

برای به دست آوردن کران‌های ناپارامتری میانگین، بدون کاستن از کلّیت می‌توان فرض کرد که $E(Y_i) = ۰$ و $Var(Y_i) = ۱$، بنا بر این، با استفاده از نتیجه‌ی ۱ می‌توان نوشت:

$$\alpha_{[n]} = \alpha(۱ - ۲^{-n})\ \alpha_{۲:۲}, \qquad (۱۰)$$

قضیه‌ی زیر ساده‌ترین کران ناپارامتری را با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس ارائه می‌دهد.

قضیه‌ی ۴ یک کران ناپارامتری برای میانگین $R_{[n]}$ به‌صورت زیر است:

$$\alpha_{[n]} \leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{۳}}(۱ - ۲^{-n}). \qquad (۱۱)$$

برهان. با تغییر متغیّر $u = F_Y(y)$ در $\alpha_{۲:۲} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) F_Y(y)\, dy$ داریم:

$$\begin{aligned}
\alpha_{[n]} &= \alpha(۱ - ۲^{-n})\ \alpha_{۲:۲} \\
&= ۲\alpha(۱ - ۲^{-n}) \int_۰^۱ F_Y^{-۱}(u) u\ \ du \\
&= \int_۰^۱ F_Y^{-۱}(u)\{۲\alpha(۱ - ۲^{-n})u - \lambda\}\, du.
\end{aligned}$$

با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس می‌توان نوشت:

$$\alpha_{[n]} \leqslant \left[\int_۰^۱ \{۲\alpha(۱ - ۲^{-n})u - \lambda\}^۲ du\right]^{\frac{۱}{۲}}.$$

که پس از ساده کردن سمت راست نابرابری بالا، عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$\alpha_{[n]} \leqslant \left\{\frac{۴}{۳}\alpha^۲(۱ - ۲^{-n})^۲ - ۲\alpha(۱ - ۲^{-n})\lambda + \lambda^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}.$$

سمت راست نابرابری بالا به‌ازای $\lambda = \alpha(۱ - ۲^{-n})$ مینیمم می‌شود، در نتیجه اثبات کامل است.

همین‌طور که ملاحظه می‌کنید توزیع نرمال استاندارد (مثال ۱) در این قاعده صدق می‌کند.

نتیجه‌ی ۴ با توجه به‌شرط برقراری تساوی در نابرابری کوشی-شوارتس، کران بالا زمانی به دست می‌آید که Y_iها از جامعه‌ای با تابع توزیع تجمعی معکوس زیر به دست آمده باشند:

$$\begin{aligned} F_Y^{-۱}(u) &= \frac{۱}{\frac{\alpha}{\sqrt{۳}}(۱ - ۲^{-n})}\{۱ + \alpha(۱ - ۲^{-n})(۲u - ۱) - ۱\} \\ &= \sqrt{۳}(۲u - ۱). \end{aligned}$$

بنا بر این، تابع توزیع تجمعی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$F_Y(y) = \frac{۱ + \sqrt{۳}y}{۲}.$$

در نتیجه، کران بالا زمانی به دست می‌آید که Y_iها دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(-\sqrt{۳}, \sqrt{۳})$ باشند.

نتیجه‌ی ۵ زمانی که اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، حد کران (۱۱) به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{۳}}(۱ - ۲^{-n}) = \frac{\alpha}{\sqrt{۳}}.$$

به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{[n]} \leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{۳}}.$$

با توجه به این که $(۱ - ۲^{-n})$ نسبت به n صعودی است می‌توان کران بالا را به‌عنوان یک کران عمومی در نظر گرفت. همچنین با حدگیری از (۷) و اجرای مراحل برهان قضیه‌ی ۴، می‌توان این کران را برای توزیع حدی زیر به دست آورد:

$$\lim_{n\to\infty} f_{R_{[n]}}(y) = f_Y(y)\{۱ + \alpha(۲F_Y(y) - ۱)\}.$$

تذکر ۲ با استفاده از نتایج مشابه برای $\alpha_{۲:۲}$ می‌توان به‌طور غیر مستقیم، قضیه‌ی ۴ و نتیجه‌ی ۴ را به دست آورد. زیرا همان‌طور که هارتلی و دیوید (۱۹۵۴) و گامبل (۱۹۵۴) و موریگوتی (۱۹۵۱، ۱۹۵۴) نشان داده‌اند:

$$\alpha_{n:n} \leqslant \frac{n - ۱}{(۲n - ۱)^{\frac{۱}{۲}}}.$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.143]

برابری زمانی به دست می‌آید که نمونه‌ی تصادفی از توزیع زیر تولید شده باشد:

$$F(y)=\left[\frac{1}{n}\left\{\frac{n-1}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}x+1\right\}\right]^{\frac{1}{n-1}},\qquad -\frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{n-1}\leqslant x\leqslant(2n-1)^{\frac{1}{2}}.$$

که با جایگذاری مقدار $n=2$ قضیه‌ی ۴ و نتیجه‌ی ۴ به دست خواهند آمد.

۳٫۲ کران برای توزیع‌های متقارن

معمولاً وقتی‌که توزیع جامعه متقارن باشد، کران‌های ناپارامتری بهبود پیدا می‌کنند، اما این مسئله برای متغیّر همراه در مدل FGM برقرار نیست. این موضوع در قضیه‌ی زیر اثبات می‌شود.

قضیه‌ی ۵ در حالتی که توزیع Y_i ها متقارن و استاندارد باشد، نابرابری کوشی-شوارتس کران (۱۱) را بهبود نمی‌دهد.

برهان. با توجه به تقارن توزیع می‌توان نوشت:

$$\alpha_{[n]}=\alpha(1-2^{-n})\int_0^1F_Y^{-1}(u)\{u-(1-u)-\lambda\}du.$$

بنا بر نابرابری کوشی-شوارتس داریم:

$$\alpha_{[n]}\leqslant\alpha(1-2^{-n})(\frac{1}{3}+\lambda^2)^{\frac{1}{2}},$$

که سمت راست نابرابری به‌ازای $\lambda=0$ مینیمم می‌شود. بدین ترتیب، حکم ثابت می‌شود.

۳٫۳ بهبود کران‌ها با دو مقدار میانگین معلوم

در این بخش، حالتی را در نظر می‌گیریم که دو میانگین متغیّرهای همراه مثل $\alpha_{[m]}$ و $\alpha_{[p]}$ $(m<p)$ معلوم باشند. کران‌هایی که در این حالت به دست می‌آیند در اصطلاح کران‌های برون‌یابی (extrapolation-type bounds) نامیده می‌شوند.

قضیه‌ی ۶ وقتی دو میانگین متغیّرهای همراه مثل $\alpha_{[m]}$ و $\alpha_{[p]}\neq 0$ $(m<p)$ معلوم باشند

$$\alpha_{[n]}\leqslant(L(n,n)-A)^{\frac{1}{2}},$$

[DOI: 10.18869/acadpub.jsri.1.2.143]

که در آن

$$L(m,n) = \frac{\alpha^{2}}{3}(1 - 2^{-n})(1 - 2^{-m}),$$

و

$$A = \frac{\left(L(m,n) - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L(p,n)\right)^{2}}{L(m,n) - 2\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L(m,p) + \left(\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}\right)^{2} L(p,p)}.$$

همچنین، کران بالا نسبت به (۱۱) بهبود یافته است، مگر در حالت $\frac{L(m,n)}{L(p,n)} = \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}$.

برهان. برای آسان‌تر شدن کار، تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g_l(u) = 1 + \alpha(1 - 2^{-l})(2u - 1).$$

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\alpha_{[n]} = \int_0^1 & F_Y^{-1}(u)[g_n(u) - c\{g_m(u) - \alpha_{[m]}F_Y^{-1}(u)\} \\ & - \ d\{g_p(u) - \alpha_{[p]}F_Y^{-1}(u)\} - \lambda] \, du.\end{aligned}$$

به‌راحتی می‌توان دید که

$$\int_0^1 g_n(u)du = 1.$$

به‌علاوه، برای خلاصه‌سازی نتایج قرار می‌دهیم:

$$K(m,n) = \int_0^1 g_n(u)g_m(u)du = 1 + \frac{\alpha^{2}}{3}(1 - 2^{-n})(1 - 2^{-m}).$$

بدین ترتیب با اعمال نابرابری کوشی-شوارتس بر (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned}\alpha_{[n]} \ \leqslant \ & \Big\{K(n,n) + c^{2}(K(m,m) - {\alpha_{[m]}}^{2}) + d^{2}(K(p,p) - {\alpha_{[p]}}^{2}) + \lambda^{2} \\ & - \ 2c(K(m,n) - \alpha_{[m]}\alpha_{[n]}) - 2d(K(p,n) - \alpha_{[p]}\alpha_{[n]}) - 2\lambda(1 - c - d) \\ & + \ 2cd(K(m,p) - \alpha_{[m]}\alpha_{[p]})\Big\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

با انتقال مقادیر نامعلوم به طرف چپ، نابرابری به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}\alpha_{[n]}(1-2c\alpha_{[m]}-2d\alpha_{[p]}) \leqslant\; & \Big\{K(n,n)+c^2(K(m,m)-\alpha_{[m]}{}^2)\\ & +\, d^2(K(p,p)-\alpha_{[p]}{}^2)+\lambda^2\\ & -\, 2cK(m,n)-2dK(p,n)-2\lambda(1-c-d)\\ & +\, 2cd(K(m,p)-\alpha_{[m]}\alpha_{[p]})\Big\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

d را طوری انتخاب می‌کنیم که ضریب $\alpha_{[n]}$ در سمت چپ نابرابری یک شود، یعنی قرار می‌دهیم $d=-\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}c$. همچنین، مقدار بهینه‌ی λ یعنی $\lambda=\left\{1-c\left(1-\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}\right)\right\}$ را جایگزین می‌کنیم. بدین ترتیب مقدار بهینه‌ی c برابر است با:

$$c_{\text{opt}}=\frac{L(m,n)-\dfrac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}L(p,n)}{L(m,n)-2\dfrac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}L(m,p)+\left(\dfrac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}\right)^2L(p,p)},$$

که در آن

$$L(m,n)=K(m,n)-1=\frac{\alpha^2}{3}(1-2^{-n})(1-2^{-m}).$$

با جایگذاری مقادیر بهینه در سمت راست نابرابری حکم ثابت می‌شود. بهبود این کران نسبت به (۱۱) با توجه به این که $A\geqslant 0$ نتیجه می‌شود. اما در حالت $\frac{L(m,n)}{L(p,n)}=\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}$ داریم $A=0$ و کران نسبت به (۱۱) تغییری نمی‌کند.

برای بهبود دادن بیش‌تر حالت بالا می‌توان توزیع‌های متقارن استاندارد با دو مقدار میانگین معلوم را در نظر گرفت.

قضیه‌ی ۷ با توجه به فرضیات قضیه‌ی ۶ برای توزیع‌های متقارن استاندارد داریم:

$$\alpha_{[n]}\leqslant (L^*(n,n)-A^*)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن

$$L^*(i,j)=L(i,j)-1,$$

و

$$A^* = \frac{\left(L^*(m,n) - \frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L^*(p,n)\right)^۲}{L^*(m,n) - ۲\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}} L^*(m,p) + \left(\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}\right)^۲ L^*(p,p)}.$$

برهان. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\alpha_{[n]} &= \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ F_Y^{-۱}(u)\Big[g_n(u) - g_n(۱-u) - c\{g_m(u) - g_m(۱-u) \\ &\quad - ۲\alpha_{[m]}F_Y^{-۱}(u)\} - d\{g_p(u) - g_p(۱-u) - ۲\alpha_{[p]}F_Y^{-۱}(u)\} - \lambda\Big]du.\end{aligned}$$

بنا بر این،

$$\begin{aligned}\alpha_{[n]} &\leqslant \frac{۱}{۲}\Big\{۲K(n,n) - ۲\int_۰^۱ g_n(u)g_n(۱-u)du \\ &\quad + c^۲\left(۲K(m,m) - ۴{\alpha_{[m]}}^۲ - ۲\int_۰^۱ g_m(u)g_m(۱-u)du\right) \\ &\quad + d^۲\left(۲K(p,p) - ۴{\alpha_{[p]}}^۲ - ۲\int_۰^۱ g_p(u)g_p(۱-u)du\right) \\ &\quad - ۲c\left(۲K(m,n) - ۲\int_۰^۱ g_n(u)g_m(۱-u)du - ۴\alpha_{[m]}\alpha_{[n]}\right) \\ &\quad - ۲d\left(۲K(p,n) - ۲\int_۰^۱ g_n(u)g_p(۱-u)du - ۴\alpha_{[p]}\alpha_{[n]}\right) \\ &\quad + ۲cd\left(۲K(m,p) - ۲\int_۰^۱ g_m(u)g_p(۱-u)du - ۴\alpha_{[m]}\alpha_{[p]}\right) \\ &\quad - ۴\lambda(۱-c-d) + \lambda^۲\Big\}^{\frac{۱}{۲}}.\end{aligned}$$

اما برای خلاصه نمودن طرف راست نابرابری بالا، توجه کنید که

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_i(u)g_j(1-u)du &= \int_0^1 \Big\{1-\alpha(1-2^{-i})(2u-1)\Big\} \\ &\quad\times \Big\{1-\alpha(1-2^{-j})(2u-1)\Big\}du \\ &= \int_0^1 1-\alpha^2(1-2^{-i})(1-2^{-j})(2u-1)^2du \\ &= 1-\frac{\alpha^2}{3}(1-2^{-i})(1-2^{-j}).\end{aligned}$$

بدین ترتیب با توجه به این که

$$K(m,n)-\int_0^1 g_n(u)g_m(1-u)du = 2(K(m,n)-1) = 2L(m,n),$$

نابرابری بالا به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{aligned}\alpha_{[n]}(1-2c\alpha_{[m]}-2d\alpha_{[p]}) \;\leqslant\; &\Big\{L(n,n)+c^2(L(m,m)-{\alpha_{[m]}}^2) \\ &+d^2(L(p,p)-{\alpha_{[p]}}^2)-2cL(m,n) \\ &-2dL(p,n)+2cd(L(m,p)-\alpha_{[m]}\alpha_{[p]}) \\ &-\lambda(1-c-d)+\frac{1}{4}\lambda^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

درست مانند برهان قضیه‌ی ۶ با در نظر گرفتن $d=-\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}c$ و مقدار بهینه‌ی λ یعنی $\lambda = 2\Big\{1-c\Big(1-\frac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}\Big)\Big\}$ مقدار بهینه‌ی c به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$c_{\text{opt}} = \frac{L^*(m,n)-\dfrac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}L^*(p,n)}{L^*(m,n)-2\dfrac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}L^*(m,p)+\left(\dfrac{\alpha_{[m]}}{\alpha_{[p]}}\right)^2L^*(p,p)},$$

بدین ترتیب نابرابری به‌صورت مورد نظر خلاصه می‌شود.

۴ نتیجه‌گیری

برابری (۱۰) به ما اجازه می‌دهد تا خواص میانگین متغیّر همراه رکوردهای بالا در مدل FGM را بدون نیاز به دانستن توزیع X و مستقیماً نسبت به خواص میانگین آماره‌ی ترتیبی دوم در یک نمونه‌ی دوتایی از توزیع Y بررسی کنیم. بدین ترتیب، می‌توان در این مدل خاص برآوردگرهای $\alpha_{[n]}$ را برحسب برآوردگرهای $\alpha_{2:2}$ به‌راحتی محاسبه کرد. همچنین فواصل اطمینان، آزمون‌های فرض و خواص حدی مربوط به پارامترهای بالا به‌راحتی قابل مقایسه هستند. همچنین، می‌توان روش‌های بیش‌تری را برای به دست آوردن کران‌های تقریبی در این مدل بررسی کرد. نویسندگان ترجیح می‌دهند در مقاله‌های بعدی مسائل بالا را مورد بررسی قرار دهند. البته باید توجه داشت که گرچه رده‌ی بالا می‌تواند شامل طیفی وسیع از توزیع‌های توأم باشد، اما فقط بخش بسیار کوچکی از کلّ است و همچنان مسئله‌ی اصلی، یعنی بررسی متغیّر همراه در یک مدل کلّی‌تر و یا مدل‌های بیش‌تر و کارامدتر به عنوان هدف نهایی مورد توجه خواهد بود.

۵ قدردانی

نویسندگان از داوران محترم به‌خاطر پیشنهادات سازنده‌ی ایشان در تهیه‌ی نسخه‌ی نهایی این مقاله قدردانی می‌نمایند.

مرجع‌ها

Arnold, B.C.; Balakrishnan, N.; Nagaraja, H.N. (1998). *Records.* Wiley, New York.

Ahsanullah, M. (1994). Record values, random record models and concomitants, *J. Statist. Res.* **28**, 89-109.

Ahsanullah, M. (2000). Concomitants of record values. *Pakistan J. Statist.* **16**, 207-215.

Balakrishnan, N. (1990). Improving the Hartley-David-Gumbel bound for the mean of extreme order statistics, *Statis. Probab. Lett.* **9**, 291-294.

David, H.A. (1981). *Order Statistics. Second Edition*, Wiley, New York.

David, H.A.; Nagaraja H.N. (1988). Concomitants of order statistics, In *Handbook of Statist.* **16**, pp. 487-513.

Gumbel, E.J. (1954). The maxima of the mean largest value and of the range, *Ann. Math. Statist.* **25**, 76-84.

Hartley, H.O.; David, H.A. (1954). Universal bounds for mean rang and extreme observation. *Ann. Math. Statist.* **25**, 85-99.

Houchens, R.L. (1984). Record Value Theory and Inference. *Ph.D. thesis*, University of California, Riverside, CA.

Khaledi, B; Kochar, S.C. (2001). On dependence structure of multivariate mixture distributions. *Ann. Inst. Stat. Math.* **53**, 620-630.

Moriguti, S. (1951). Extermal properties of extreme value distributions. *Ann. Math. Statist.* **22**, 523-536.

Moriguti, S. (1954). Bounds for second moments of the sample range. *Rep. Stat. Appl. Res.* JUSE **2**, 99-103.

Nagaraja, H.N. (1978). On the expected values of record values. *Aust. J. Statist.*, **20**, 176-182.

Raqab, M.Z. ; Ahsanullah, M. (2002). Concomitants of ordered random variables – A review, *J. Stat. Theory App.* **1**, 15-26.

Yang, S.S. (1977). General distribution theory of the concomitants of order statistics. *Ann. Statist.* **5**, 996-1002.

دریافت: ۱۷ خرداد ۱۳۸۴
آخرین اصلاح: ۱۲ شهریور ۱۳۸۴

مرتضیٰ امینی
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه فردوسی مشهد،
مشهد، ایران.
پیام‌نگار: *mort_amini@hotmail.com*

جعفر احمدی
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه فردوسی مشهد،
مشهد، ایران.
پیام‌نگار: *ahmadi@math.um.ac.ir*